
Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Grundlagen	1
1.1	Ziele	1
1.2	Einführendes Beispiel: Berechnung der Fibonacci-Zahlen	2
1.2.1	Rekursive Berechnung	2
1.2.2	Iterative Berechnung	5
1.2.3	Berechnung mit Hilfe des iterierten Quadrierens	6
1.3	Grundlagen	10
1.3.1	Registermaschine (RAM)	10
1.3.2	Zeitkomplexität	13
1.3.3	Platzkomplexität	17
1.3.4	Beschreibungskomplexität	19
1.3.5	Landausche Symbole	19
1.4	Übungsaufgaben	24
2	Sortieren	27
2.1	Einfache Sortieralgorithmen	27
2.1.1	Relationen, Ordnungen und Sortierungen	27
2.1.2	Sortieren durch Auswahl	29
2.1.3	Sortieren durch Einfügen	31
2.1.4	Verbessertes Sortieren durch Einfügen	33
2.2	Mergesort	34
2.2.1	Rekursiver Mergesort	35
2.2.2	Analyse des rekursiven Mergesort	36
2.2.3	Iterativer Mergesort	39
2.2.4	Analyse des iterativen Mergesort	40
2.3	Heapsort	41
2.3.1	Heaps und generischer Heapsort	42
2.3.2	Implementierung von Heaps	43
2.3.3	Standard-Heapsort	49
2.3.4	Analyse von Standard-Heapsort	51
2.3.5	Carlssons Variante von Heapsort	53
2.3.6	Bottom-Up-Heapsort	56
2.4	Quicksort	57
2.4.1	Allgemeines Verfahren	57

2.4.2	Worst-Case und Best-Case Analyse von Quicksort	60
2.4.3	Average-Case Analyse von Quicksort	61
2.4.4	Varianten von Quicksort	65
2.5	Interludium: Divide-and-Conquer-Algorithmen	66
2.5.1	Prinzip	67
2.5.2	Ansatz für eine allgemeine Analyse	67
2.5.3	Analyse eines Spezialfalles	68
2.5.4	Analyse für allgemeinere Fälle	70
2.6	Eine untere Schranke für das Sortieren	71
2.6.1	Entscheidungsbaum	72
2.6.2	Maximale Anzahl von Vergleichen	72
2.6.3	Mittlere Anzahl an Vergleichen	75
2.7	Bucketsort	77
2.7.1	Das Universum $[0 : N - 1]$	77
2.7.2	Das Universum $[0 : N - 1]^c$	78
2.7.3	Das Universum $[0 : N - 1]^*$	80
2.7.4	Hinweise zur Implementierung	82
2.8	Übungsaufgaben	84
3	Selektieren	87
3.1	Quickselect	87
3.1.1	Ein partitionierender Algorithmus	87
3.1.2	Analyse von Quickselect	88
3.2	Ein linearer Selektionsalgorithmus	90
3.2.1	Der BFPRT-Algorithmus	90
3.2.2	Analyse des BFPRT-Algorithmus	92
3.3	Der Spinnen-Algorithmus	95
3.3.1	Spinnen	95
3.3.2	Der Algorithmus	96
3.3.3	Analyse des Algorithmus	97
3.3.4	Die Spinnenfabrik	98
3.4	Eine untere Schranke	102
3.4.1	Ein Gegenspielerargument	102
3.4.2	Mindestanzahl von Vergleichen im schlimmsten Falle	103
3.5	Ein randomisierter Median-Algorithmus	105
3.5.1	Der Algorithmus	105
3.5.2	Ein wenig Wahrscheinlichkeitstheorie	105
3.5.3	Analyse des randomisierten Algorithmus	113
3.6	Neuere Ergebnisse	116
3.6.1	Algorithmen	117
3.6.2	Untere Schranken	117

3.7	Übungsaufgaben	117
4	Suchen	119
4.1	Wörterbücher	119
4.2	Ausnutzen von Sortierung	120
4.2.1	Lineare Suche	120
4.2.2	Binäre Suche	120
4.2.3	Exponentielle Suche	120
4.3	Hashing	121
4.3.1	Hashfunktionen	122
4.3.2	Hashing durch Verkettung	125
4.3.3	Linear Probing	126
4.3.4	Quadratic Probing	129
4.3.5	Double Hashing	130
4.3.6	Universelle Hashfunktionen	132
4.4	Binäre Suchbäume	134
4.4.1	Suchbaumeigenschaft	134
4.4.2	Suchen und Einfügen im binären Suchbaum	135
4.4.3	Löschen im binären Suchbaum	135
4.5	AVL-Bäume	137
4.5.1	Höhenbalancierung	137
4.5.2	Einfügen in einen AVL-Baum	140
4.5.3	Löschen im AVL-Baum	143
4.6	(a, b) -Bäume	146
4.6.1	Definition	147
4.6.2	Einfügen in einen (a, b) -Baum	148
4.6.3	Löschen im (a, b) -Baum	149
4.7	Weitere Varianten von Suchbäumen	151
4.7.1	Vielweg-Suchbäume	151
4.7.2	Balancierte Suchbäume	152
4.8	Tries	153
4.8.1	Einfügen und Löschen in Tries	153
4.8.2	Implementierung von Tries	154
4.9	Übungsaufgaben	156
5	Graphen	157
5.1	Grundlagen der Graphentheorie	157
5.1.1	Ungerichtete Graphen	157
5.1.2	Gerichtete Graphen	160
5.1.3	Repräsentationen von Graphen	164
5.2	Traversieren von Graphen	166
5.2.1	Tiefensuche (DFS)	166

5.2.2	Breitensuche (BFS)	169
5.2.3	Traversieren von Bäumen	172
5.3	Zusammenhang von Graphen	173
5.3.1	Ungerichtete Graphen	173
5.3.2	Gerichtete Graphen	173
5.4	Kürzeste Wege	178
5.4.1	Der Algorithmus von Floyd	179
5.4.2	Transitive Hülle von Graphen	183
5.4.3	Der Algorithmus von Dijkstra	186
5.4.4	Der Algorithmus von Dijkstra mit Priority Queues	188
5.5	Interludium: Fibonacci-Heaps	192
5.5.1	Aufbau eines Fibonacci-Heaps	192
5.5.2	Analyse von Fibonacci-Heaps	196
5.6	Minimale Spannbäume	199
5.6.1	Der Algorithmus von Prim	200
5.6.2	Der Algorithmus von Kruskal	204
5.7	Interludium: Union-Find-Datenstrukturen	206
5.7.1	Darstellung von Mengen durch Listen	206
5.7.2	Darstellung von Mengen durch Bäume	208
5.7.3	Pfadkompression	210
5.8	Übungsaufgaben	212
6	Texte	215
6.1	Alphabete und Zeichenketten	215
6.2	Der Algorithmus von Knuth, Morris und Pratt	216
6.2.1	Die Idee	216
6.2.2	Analyse des Algorithmus von Knuth, Morris und Pratt	218
6.2.3	Bestimmung eigentlicher Ränder	219
6.3	Der Algorithmus von Boyer und Moore	221
6.3.1	Die Idee	221
6.3.2	Bestimmung der Shift-Tabelle	224
6.3.3	Analyse des Algorithmus von Boyer und Moore	226
6.4	Tries für Texte	230
6.4.1	Suffix-Tries	231
6.4.2	Suffix-Bäume	234
6.4.3	Suchen mit Suffix-Bäumen	238
6.5	Interludium: Datenkompression	239
6.5.1	Eine untere Schranke	239
6.5.2	Huffman-Kodierung	240
6.5.3	Lempel-Ziv-77	244
6.5.4	Lempel-Ziv-78	245

6.5.5	Lempel-Ziv-Welch	246
6.5.6	Die Burrows-Wheeler-Transformation	247
6.6	Übungsaufgaben	249
7	Arithmetik	251
7.1	Euklidischer Algorithmus	251
7.1.1	Grundalgorithmus	251
7.1.2	Erweiterte Version	253
7.1.3	Iterative Implementierungen	255
7.1.4	Effiziente Implementierungen	256
7.2	Modulare Arithmetik	258
7.2.1	Grundlagen	259
7.2.2	Modulare Gleichungen	262
7.2.3	Chinesischer Restsatz	263
7.2.4	Berechnung von Potenzen	264
7.3	Primzahlen	265
7.3.1	Elementare Ergebnisse	266
7.3.2	Primzahltests	269
7.4	Interludium: Kryptographie	273
7.4.1	Public-Key-Kryptographie	273
7.4.2	Das RSA-Verfahren	275
7.4.3	Sicherheit des RSA-Verfahrens	276
7.5	Die schnelle Fouriertransformation	277
7.5.1	Multiplikation von Polynomen	277
7.5.2	Eine alternative Methode zur Polynommultiplikation	278
7.5.3	Berechnung der Konvolution mittels FFT	279
7.6	Multiplikation ganzer Zahlen	283
7.6.1	Analyse der Schulmethode	283
7.6.2	Ein Divide-and-Conquer-Algorithmus	284
7.6.3	Analyse des Algorithmus von Karatsuba und Ofman	285
7.6.4	Verbesserung des Algorithmus von Karatsuba und Ofman	287
7.7	Optimale Klammerung von Matrizenprodukten	290
7.7.1	Einleitendes Beispiel	290
7.7.2	Anzahl verschiedener Klammerungen	290
7.7.3	Lösung mit dynamischer Programmierung	293
7.8	Matrizenmultiplikation	294
7.8.1	Der Algorithmus von Strassen	295
7.8.2	Analyse des Algorithmus von Strassen	296
7.8.3	Verbesserung des Algorithmus von Strassen	297
7.8.4	Weitere Entwicklungen	300
7.8.5	Invertierung von Matrizen	300

7.8.6	Transitive Hülle	303
7.9	Übungsaufgaben	304
8	Schwierige Probleme	307
8.1	Unentscheidbarkeit	307
8.1.1	Entscheidungsprobleme	307
8.1.2	Abzählbarkeit	308
8.1.3	Gödelisierung	311
8.1.4	Universelle Registermaschinen	313
8.1.5	Unentscheidbare Probleme	314
8.1.6	Die Church-Turing These	317
8.2	\mathcal{NP} -Vollständigkeit	317
8.2.1	Die Klassen \mathcal{P} und \mathcal{NP}	318
8.2.2	Standard-Registermaschinen	319
8.2.3	Reduktionen	321
8.2.4	\mathcal{NP} -harte und \mathcal{NP} -vollständige Probleme	323
8.2.5	Erfüllbarkeitsproblem	325
8.2.6	Satz von Cook	327
8.2.7	Konjunktive Normalform und 3SAT	331
8.2.8	Beispiele \mathcal{NP} -vollständiger Probleme	333
8.3	Approximative Algorithmen	339
8.3.1	Optimierungsprobleme und Approximationen	340
8.3.2	Die Klassen \mathcal{NPO} und \mathcal{PO}	343
8.3.3	Die Klasse \mathcal{APX}	344
8.3.4	Die Klasse \mathcal{PTAS}	345
8.3.5	Die Klasse \mathcal{FPTAS}	347
8.4	Übungsaufgaben	353
A	Literaturhinweise	355
A.1	Lehrbücher zur Algorithmik	355
A.2	Lehrbücher zu angrenzenden Themen	356
A.3	Originalarbeiten	357
B	Gofer-Skripten	359
B.1	Berechnung von Fibonacci Zahlen	359
C	Index	361