SS 2020

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Ergänzendes Material

(vormals Tafelpräsentation)

Susanne Albers

Fakultät für Informatik
TU München

Sommersemester 2020

Definition 1

Würfel einmal geworfen: $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$
Münze einmal geworfen: $\Omega = \{\mathrm{Kopf}, \mathrm{Zahl}\}$

Beispiel 3

$\Pr[\{\underbrace{(\mathsf{h}/\mathsf{t})\ldots\mathsf{ht}}_{i-2}\,\mathsf{hh},\ \underbrace{(\mathsf{h}/\mathsf{t})\ldots\mathsf{th}}_{i-2}\,\mathsf{tt}\}] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^i$

$$2\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i - 1 = 2 - 1 = 1$$

Beispiel 7

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } |x| < 1$$

Lemma 8

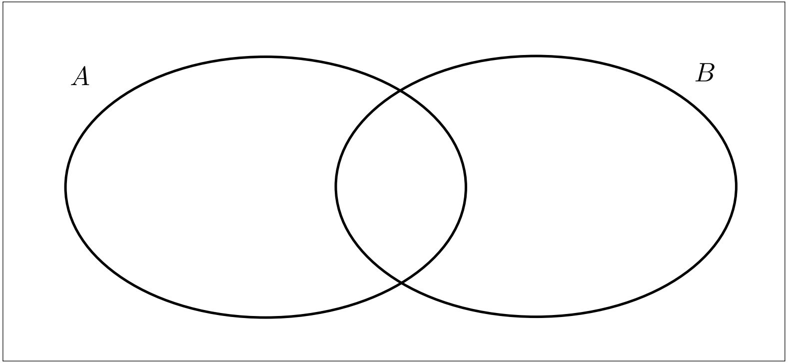
$$\Pr[A] = \sum_{\omega \in A} \Pr[\omega] \leq \sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1$$

$$1 = \Pr[\Omega] = \Pr[A \cup \overline{A}] = \Pr[A] + \Pr[\overline{A}]$$

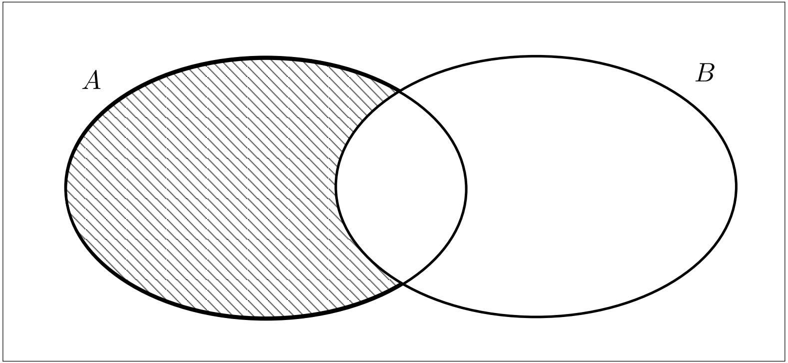
$$\Pr[A] = \sum_{\omega \in A} \Pr[\omega] \leq \sum_{\omega \in B} \Pr[\omega] = \Pr[B]$$

$$\Pr[\cup_{i=1}^{n} A_i] = \sum_{\omega \in \cup_{i=1}^{n} A_i} \Pr[\omega] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\omega \in A_i} \Pr[\omega] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i]$$

Satz 9



Satz 9

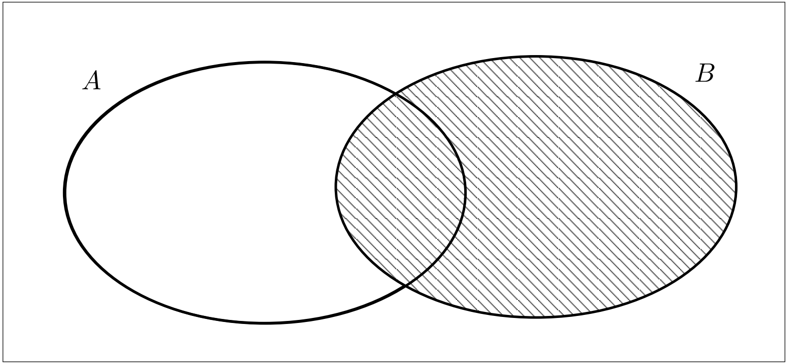


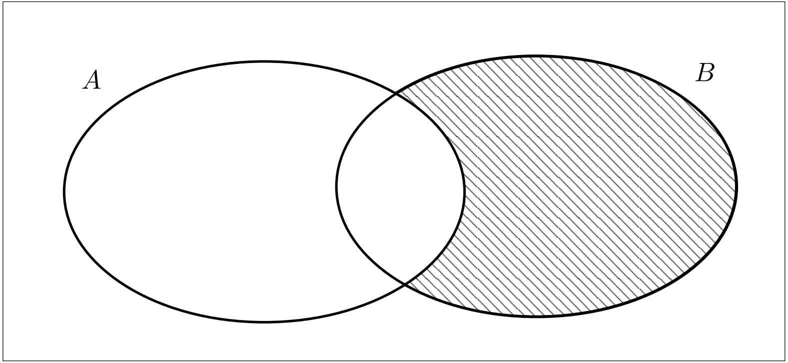
$C = A \setminus B$

Beispiel 11

Karten : 2 3 4 5 6 7 8 9 10 B D K

Definition 12



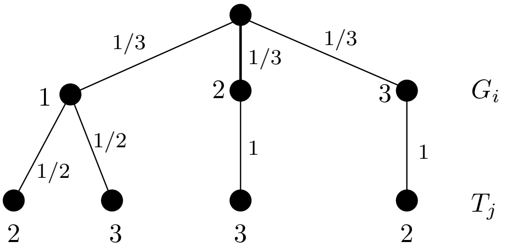


$$\Pr[\overline{A}|B] = \frac{\Pr[\overline{A} \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B] - \Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = 1 - \Pr[A|B]$$

Beispiel 15

G_i = Gewinn hinter Tür $i \quad i = 1, 2, 3$

T_j = Showmaster öffnet Tür $j \quad j = 2, 3$



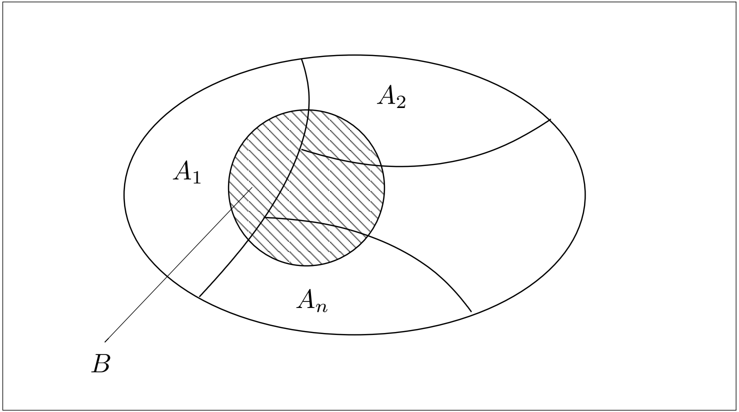
$$\Pr[G_1|T_3] = \frac{\Pr[G_1 \cap T_3]}{\Pr[T_3]} = \frac{1/6}{1/6 + 1/3} = 1/3$$

Beispiel 17

Sei $0 \leq x \leq 1$. Taylor Entwicklung:

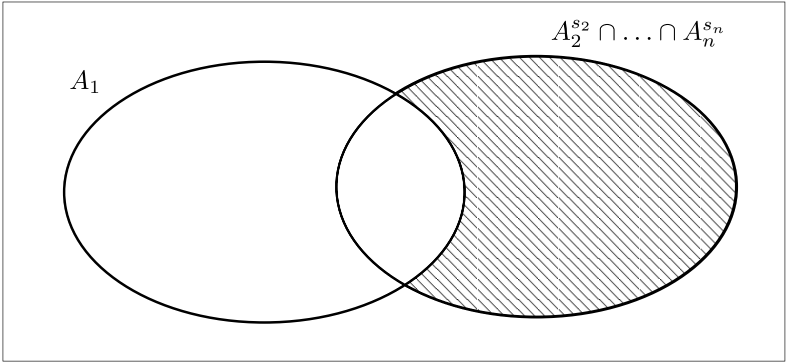
$$e^{-x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!} = 1 - x + \underbrace{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}}_{\geq 0} + \ldots$$

Satz 18



Lemma 23

(2) $\Longrightarrow$ (3)



(3) $\Longrightarrow$ (2)
Anwendung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit
$B \hat{=} A_1 \cap A_2 \quad A_i \hat{=} A_3^{s_3} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}$

1. Z.Z.: $A_1 \cap A_2 \subseteq \bigcup_{s_3,\ldots,s_n \in \{0,1\}} (A_3^{s_3} \cap \ldots \cap A_n^{s_n})$

Sei $\omega \in A_1 \cap A_2$ beliebig.

Für $i = 3, \ldots, n$ setze $s_i = 1$, falls $\omega \in A_i$, und $s_i = 0$, falls $\omega \in \overline{A}_i$.

Für diesen Vektor $(s_3, \ldots, s_n)$ gilt $\omega \in A_3^{s_3} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}$.

2. Z.Z.: Für verschiedene $(s_3, \ldots, s_n) \in \{0,1\}^{n-2}$ sind die Ereignisse $(A_3^{s_3} \cap \ldots \cap A_n^{s_n})$ disjunkt.

Betrachte verschiedene $(s_3, \ldots, s_n) \in \{0,1\}^{n-2}$ und $(s'_3, \ldots, s'_n) \in \{0,1\}^{n-2}$.

Dann existiert ein $i \in \{3, \ldots, n\}$, für das sich die Vektoren unterscheiden.

Sei o.B.d.A. $s_i = 0$ und $s'_i = 1$.

Dann ist $A_i^{s_i}$ disjunkt zu $A_i^{s'_i}$ und somit
$(A_3^{s_3} \cap \ldots \cap A_i^{s'_i} \cap \ldots \cap A_n^{s_n})$ disjunkt zu $(A_3^{s'_3} \cap \ldots \cap A_i^{s'_i} \cap \ldots \cap A_n^{s'_n})$.

$$\Pr[A_1 \cap A_2] = \sum_{s_3,\ldots,s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_1 \cap A_2 | A_3^{s_3} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] \cdot \Pr[A_3^{s_3} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}]$$

$$\Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2] \cdot (\Pr[A_3^0] + \Pr[A_3^1]) \cdot (\Pr[A_4^0] + \Pr[A_4^1]) \cdot \ldots \cdot (\Pr[A_n^0] + \Pr[A_n^1])$$

Lemma 24

$$\Pr[A \cap B \cap C] = \Pr[A] \cdot \Pr[B] \cdot \Pr[C] = \Pr[A \cap B] \cdot \Pr[C]$$

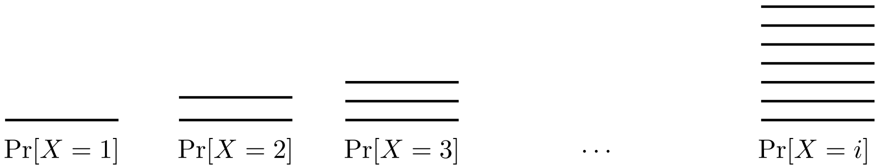
Beispiel 31

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2$$

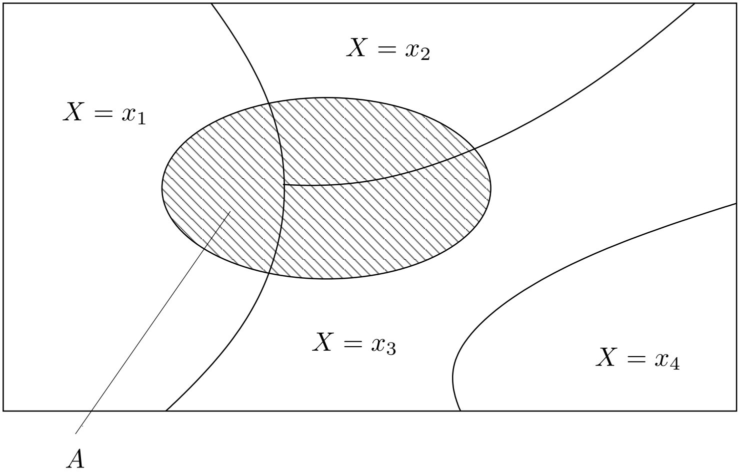
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{für } |x| < 1$$

Satz 34

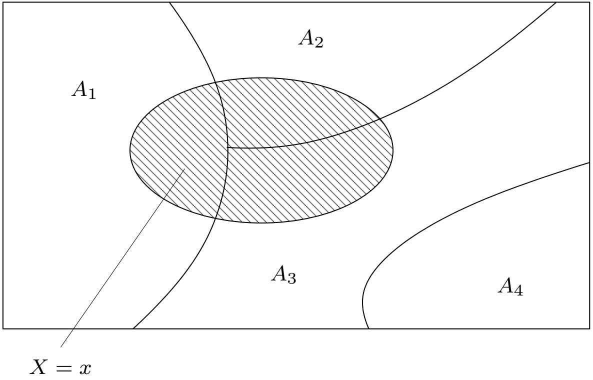


Definition 35



Satz 36

$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B|A_i]\Pr[A_i]$



$\sum_{x\in W_X} x \cdot \Pr[X = x|A_i] = \sum_{x\in W_X} x \cdot f_{X|A_i}(x) = \mathbb{E}[X|A_i]$

Varianz

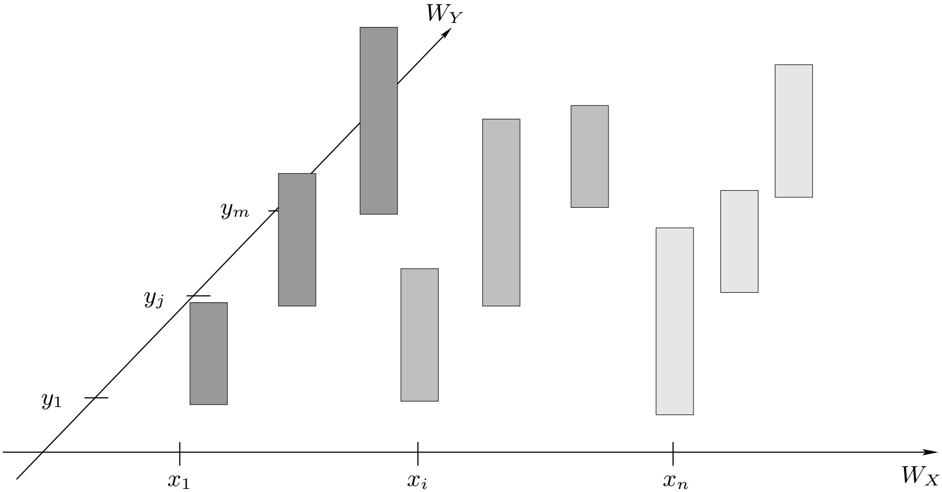
Wenn zwei Zufallsvariablen denselben Erwartungswert haben, so können sie sich stark unterscheiden.

$\Pr[X = 1] = 1/2 \qquad \Pr[X = -1] = 1/2$
$\Pr[X = 10^6] = 1/2 \qquad \Pr[X = -10^6] = 1/2$

Beispiel 40

$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mu)^2]$

Randdichte



Satz 49

$W_X = \{x_1, \ldots, x_n\}$

$$\begin{pmatrix} f_X(x_1) \\ f_X(x_2) \\ \vdots \\ f_X(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_Y(z - x_1) \\ f_Y(z - x_2) \\ \vdots \\ f_Y(z - x_n) \end{pmatrix}$$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$\Pr[B] = \sum_{i=1}^n \Pr[B|A_i]\Pr[A_i]$ $\quad$ $A_1, \ldots, A_n$ disjunkt $\quad$ $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$

$A_x =$ "$X = x$" $\quad$ $\bigcup_{x \in W_X} A_x = \Omega$

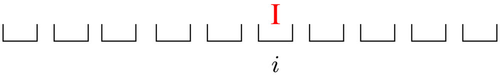
Beispiel 48

Es muss gelten $1 \leq z - x \leq 6$, also $x \leq z - 1$ und $x \geq z - 6$.

Für $7 < z \leq 12$ ist

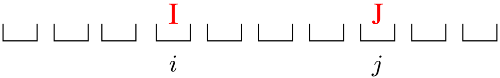
$$\sum_{x=z-6}^{6} \frac{1}{36} = \frac{1}{36}(6 - (z-6) + 1) = \frac{1}{36}(13 - z)$$

Beispiel 51



WSK: $\frac{(n-1)!}{n!}$

$$X^2 = (X_1 + \ldots + X_n)(X_1 + \ldots + X_n)$$



WSK: $\frac{(n-2)!}{n!}$

Satz 52

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \neq 0$$

Satz 9

$A_1, \ldots, A_n \qquad B = A_1 \cup \ldots \cup A_n$

I_i: Indikatorvariable für A_i, $1 \le i \le n$
I_B, $I_{\overline{B}}$: Indikatorvariablen für B und $\overline{B}$

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - I_i) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad I_i = 0 \text{ also } \neg A_i \text{ gilt für } i = 1, \ldots, n$$

$$(\neg A_1 \cap \ldots \cap \neg A_n) = \neg(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \overline{B}$$

$$1 - I_B = I_{\overline{B}} = \prod_{i=1}^{n}(1 - I_i) = 1 - \sum_{1 \le i \le n} I_i + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} I_{i_1} I_{i_2} - \ldots + (-1)^n I_1 \cdot \ldots \cdot I_n$$

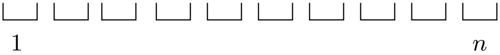
Satz 9

$$1 - I_B = I_{\overline{B}} = \prod_{i=1}^{n}(1 - I_i) \quad = \quad 1 - \sum_{1 \le i \le n} I_i + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} I_{i_1} I_{i_2} - \ldots + (-1)^n I_1 \cdot \ldots \cdot I_n$$

$$I_B \quad = \quad \sum_{1 \le i \le n} I_i - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} I_{i_1} I_{i_2} + \ldots + (-1)^{n-1} I_1 \cdot \ldots \cdot I_n$$

$$\Pr[B] = \sum_{1 \le i \le n} \Pr[A_i] - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + \ldots + (-1)^{n-1} \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n]$$

Definition 55



Geometrische Verteilung

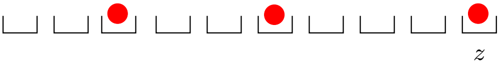
$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$g'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$g''(x) = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)x^{i-2} = \sum_{j=1}^{\infty} j(j+1)x^{j-1} = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Warten auf den n-ten Erfolg



Poisson Verteilung

Taylor Entwicklung $e^x = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$

$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n^{\underline{k}}$

$\frac{n^{\underline{k}}}{n^k} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n \quad n \quad \cdot \ldots \cdot \quad n}$

Summe Poisson-verteilter Zufallsvariablen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$(a+b)^z = \sum_{x=0}^{z} \binom{z}{x} a^x b^{z-x}$$

Satz 63

Führt man das Warscheinlichkeitsexperiment hinreichend oft durch, so liegt das arithmetische Mittel der X_i mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1-\epsilon$ im Intervall $[\mathbb{E}[X]-\delta, \mathbb{E}[X]+\delta]$.

Satz 64

Wir zeigen $e^\delta \le (1+\delta)^{(1+\delta)}$, für $\delta > 0$. Die Ungleichung ist äquivalent zu
$f(\delta) := \delta \le (1+\delta)\ln(1+\delta) =: g(\delta)$.
Es gilt $f(0) = g(0)$ sowie $f'(\delta) = 1 \le \ln(1+\delta) + 1 \le g'(\delta)$.

$$\mathbb{E}[e^{\sum_{i=1}^n tX_i}] = \mathbb{E}[e^{tX_1} \cdot \ldots \cdot e^{tX_n}]$$

$$1 + x \le e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{für } x \ge 0$$

$$e^{p_1(e^t-1)} \cdot \ldots \cdot e^{p_n(e^t-1)}$$

$$f'(t) = \left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{ab\mu e^t - ab(1+\delta)\mu}{b^2} \implies e^t = 1 + \delta$$

Beispiel 65

$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \frac{n}{2} \cdot 0,1]$

Lemma 67

Es gilt $f'(x) \geq g'(x)$ für $0 \leq x < 1$ denn $1 - x \leq e^{-x}$

$$e^{-x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!} = 1 - x + \underbrace{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}}_{\geq 0} + \ldots$$

Korollar 68

1. $\left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu} \leq \left(\frac{1}{e^{\delta^2/3}}\right)^{\mu}$
2. $\left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu} \leq \left(\frac{1}{e^{\delta^2/2}}\right)^{\mu}$
3. $\Pr[|X - \mu| \geq \delta\mu] = \Pr[X - \mu \geq \delta\mu] + \Pr[X - \mu \leq -\delta\mu]$ sowie $e^{\mu\delta^2/3} \leq e^{\mu\delta^2/2}$

Beispiel 69

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{Ball } j \text{ landet in Korb } i, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$X_i = X_{i1} + \ldots + X_{in}$

$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_{i1}] + \ldots + \mathbb{E}[X_{in}] = n \cdot \frac{1}{n} = 1$

$(\frac{1}{2})^{2 \log n} = (\frac{1}{n})^2$

Beobachtung

$0^0 = 1$

$G''_X(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\Pr[X = k]s^{k-2}$

$G^{(i)}_X(s) = \sum_{k=i}^{\infty} k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-i+1)\Pr[X = k]s^{k-i}$

Satz 71

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

$$G_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{G_X^{(i)}(0)}{i!} s^i$$

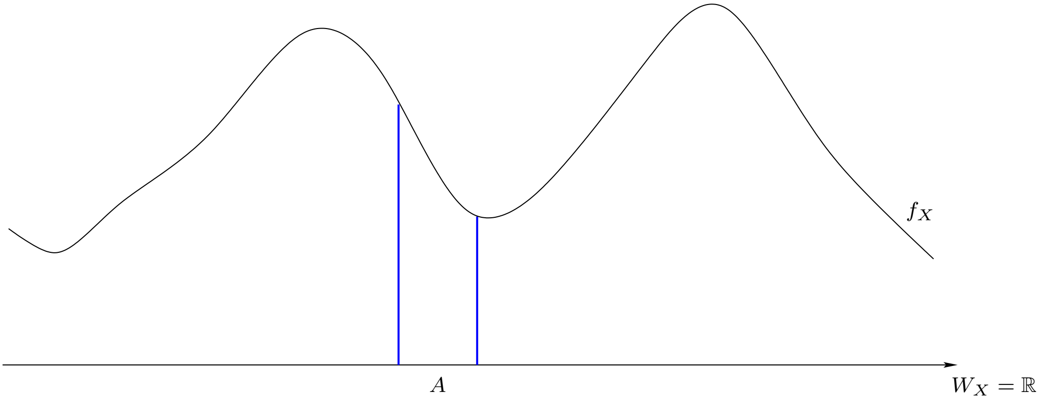
$$G_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \Pr[X = i] \cdot s^i$$

Beispiel 73

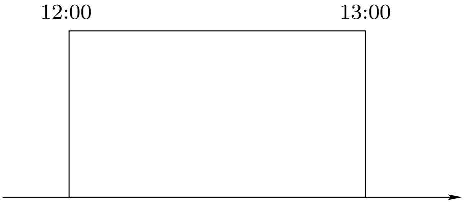
$$G_X^{(i)}(s) = \sum_{k=i}^{\infty} k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-i+1) \Pr[X = k] s^{k-i}$$

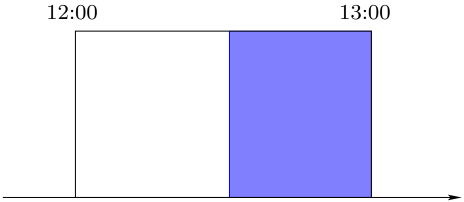
Dichte, kontinuierliche Zufallsvariable

$X : \Omega = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Dichte, Gleichverteilung





Dichte, Gleichverteilung

Dichte, Verteilung

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}\,t \qquad F'(x) = f(x)$$

Definition 82

$\Omega \in \mathcal{A} \Longrightarrow \overline{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{A}$
$A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathcal{A}$

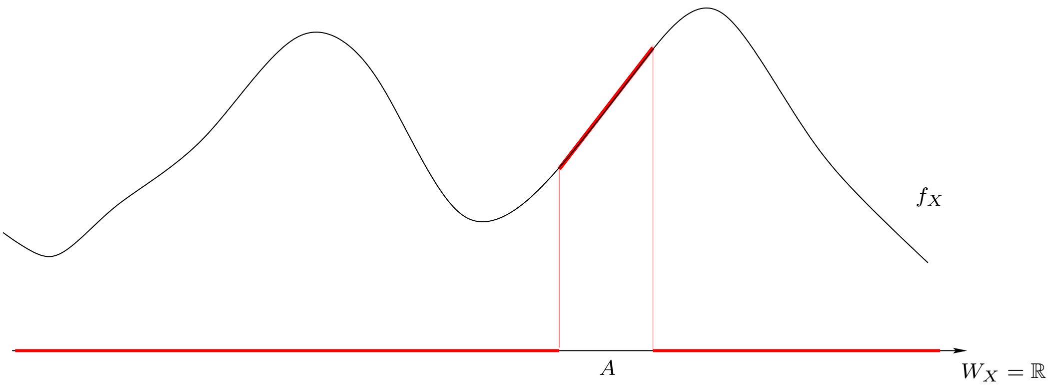
Lemma 84

1. W2: $A_1 = \Omega \quad A_2 = A_3 = \ldots = \emptyset$
   $\Pr[\Omega] = \Pr[\Omega] + \sum_{i=2}^{\infty} \Pr[\emptyset] = 1$

3. $1 = \Pr[\Omega] = \Pr[A] + \Pr[\overline{A}] = 1$

4. $C := B \setminus A \quad \Pr[B] = \Pr[A \cup C] = \Pr[A] + \Pr[C]$

Lebesgue-Integrale



Lemma 89

$$\int_a^b g(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(u)\,\mathrm{d}\,u$$

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(a\left(\frac{t-b}{a}\right) + b\right) \cdot f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}\,\mathrm{d}\,t = \int_{-\infty}^{\infty} (au+b) f_X(u)\,\mathrm{d}\,u$$

$$\varphi(t) = (t-b)/a$$

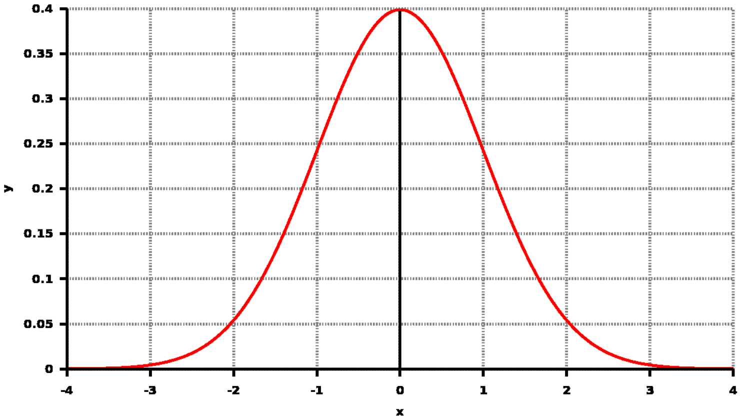
Beispiel 90

$$\frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ba + a^2}{3}$$

denn $\quad (b^2 + ba + a^2)(b-a) = b^3 + b^2a + ba^2 - b^2a - ba^2 - a^3$

$$\frac{b^2 + ba + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4(a+b)^2 - 4ab - 3(a+b)^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Normalverteilung



Quelle: Wikipedia

Mehrdimensionale Subtitutionsregel

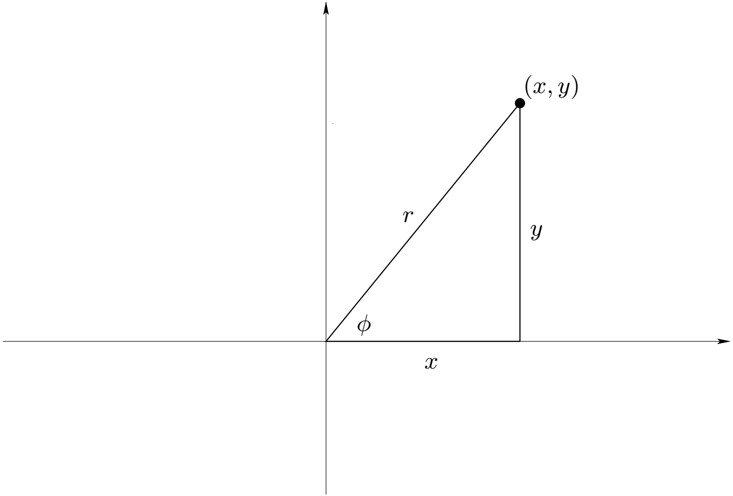
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig $\quad g : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar

$$\int_{g(M)} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_M f(g(t))|\det\, g'(t)|\,\mathrm{d}\,t$$

Punkt im $\mathbb{R}^2$ festgelegt durch
(a) Abstand vom Ursprung und (b) Winkel bzgl. einer festen Richtung.
$x = r\cos\phi \quad y = r\sin\phi$
$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$

$$\int_{g(M)} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_M f(r\cos\phi, r\sin\phi)|r|\,\mathrm{d}(r,\phi)$$

Polargitter



Satz 93, Substitutionsregel

$$\int_{g(x)}^{g(y)} f(u) \,\mathrm{d}\, u = \int_x^y f(g(v))g'(v) \,\mathrm{d}\, v$$

Satz 94, Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x)g(x) \,\mathrm{d}\, x = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \,\mathrm{d}\, x$$

Satz 98

$$g(1) = g\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n\text{-mal}}\Big) = g\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{(n-1)\text{-mal}}\Big) g\Big(\frac{1}{n}\Big) = g\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{(n-2)\text{-mal}}\Big) g\Big(\frac{1}{n}\Big)^2$$

$$g\Big(\frac{p}{q}\Big) = g\Big(\underbrace{\frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}}_{p\text{-mal}}\Big) = g\Big(\underbrace{\frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}}_{(p-1)\text{-mal}}\Big) g\Big(\frac{1}{q}\Big) = g\Big(\underbrace{\frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}}_{(p-2)\text{-mal}}\Big) g\Big(\frac{1}{q}\Big)^2$$

Annahme: $\Pr[X > 1/n] = 0 \ \forall n$

Geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{l} x^i = \frac{1 - x^{l+1}}{1 - x}$$

Poisson-Prozess

$$\begin{array}{ccc} \text{GEOMETRISCH} & \text{BINOMIAL} & b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ \downarrow & \downarrow & \\ \text{EXPONENTIAL} & \text{POISSON} & \end{array}$$

Satz 105, Substitutionsregel

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_a^b f(g(z))g'(z)\,\mathrm{d}\,z$$

Satz 106

$\mathbb{E}[e^{t(a_1X_1+\cdots+a_nX_n)}] = \mathbb{E}[e^{ta_1X_1} \cdot \ldots \cdot e^{ta_nX_n}]$

$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\Longrightarrow f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ unabhängig

$\mathbb{E}[Y_1 \cdot \ldots \cdot Y_n] = \mathbb{E}[Y_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[Y_n]$, wenn $Y_1, \ldots Y_n$ unabhängig

Korollar 110

$$\frac{H_n}{n} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} H_n^* + p$$

Induktive Statistik

Beispiel: Möchten Verhalten von komplexen Systemen studieren.
Leistungsmessung mit Testeingaben.
2 Router: Arbeitet einer im Durchschnitt mehr Datenpakete ab?
Router 1: $(53; 43; 37; 73; 58; 61; 38; 54)$
Router 2: $(33; 67; 26; 43; 46; 55; 80)$

Konfidenzintervalle

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \mu) \leq c \quad \Leftrightarrow \quad \overline{X} - \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} c$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \mu) \geq -c \quad \Leftrightarrow \quad \overline{X} - \mu \geq -\frac{\sigma}{\sqrt{n}} c$$

Beispiel t-Test

Router: Beträgt die mittlere Anzahl der bearbeiteten Pakete mindestens 60 Einheiten?

X_i = Anzahl bearbeitete Pakete in i-ter Messung

$\mathbb{E}[X_i] = \mu \qquad \mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2$

H_0: $\mu \geq 60 \qquad \alpha =$ 0,05

Stichprobe: $(53; 53; 37; 73; 58; 61; 38; 54)$

$\overline{X} \approx$ 53,375 $\qquad S^2 \approx$ 138,55 $\qquad T \approx$ -1,592

$t_{7;0,05} \approx$ -1,895 $\qquad$ keine Ablehnung

Beispiel 2-Stichprobentest

2 Router: Unterscheidet sich die mittlere Last an Paketen signifikant?

X: $(53; 53; 37; 73; 58; 61; 38; 54)$

Y: $(33; 66; 26; 43; 46; 55; 54)$

H_0: $\mu_X = \mu_Y \qquad \alpha = 0,05$

$\overline{X} \approx$ 53,375 $\qquad S_X^2 \approx$ 138,55

$\overline{Y} \approx$ 46,143 $\qquad S_Y^2 \approx$ 187,14

$T \approx$ 1,102

$t_{13;0,975} \approx$ 2,160 $\qquad$ keine Ablehnung

Stochastische Prozesse

Beispiel: Ausfallbehaftete Netzwerkverbindung

1. Ansatz: Leitung zu jedem Zeitpunkt mit Wahrscheinlichkeit p funktionstüchtig.
Bernoulli-Verteilung

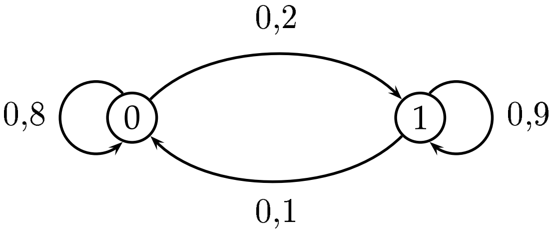
$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{Leitung funktionstüchtig zum Zeitpunkt } t, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Ansatz:
Leitung funktioniert mit WSK 0,9, wenn sie im letzten Zeitschritt funktioniert hat.
Leitung funktioniert mit WSK 0,2, wenn sie im letzten Zeitschritt defekt war.

$\Pr[X_{t+1} = 1 | X_t = 1] = 0{,}9 \qquad \Pr[X_{t+1} = 1 | X_t = 0] = 0{,}2$ $\Pr[X_{t+1} = 0 | X_t = 1] = 0{,}1$
$\Pr[X_{t+1} = 0 | X_t = 0] = 0{,}8$

Abstraktion 1

S = Menge von Zuständen
Übergangsdiagramm: Knoten entsprechen Zuständen; Kanten beschriftet mit Übergangswahrscheinlichkeiten
Random Walk entspricht zeitlichem Ablauf des Systems.



$t = 0$: Zustand 1
$t = 2$: WSK für Zustand 1? 111 mit WSK 0,81 101 mit WSK 0,02

$q_0 = (0; 1) \qquad q_1 = (0{,}1; 0{,}9) \qquad q_2 = (0{,}17; 0{,}83)$

Abstraktion 2

Übergangsmatrix

$p_{ij}^t = \Pr[X_{t+1} = j | X_t = i]$

Wenn die Wahrscheinlichkeiten nicht von t abhängen, so ergibt sich Matrix P.

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

$q_0 = (0;1) \qquad q_1 = q_0 P = (0{,}1; 0{,}9)$

$q_2 = q_1 P = (0{,}08 + 0{,}09; 0{,}02 + 0{,}81) = (0{,}17; 0{,}83)$

Berechnung Übergangswahrscheinlichkeiten

$$(q_{t+1})_k = \underbrace{(\ldots\ldots\ldots)}_{q_t} \begin{pmatrix} p_{0,k} \\ \vdots \\ p_{i,k} \\ \vdots \\ p_{n-1,k} \end{pmatrix}$$

Beispiel 128

$$h_{32} = \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2$$

$$f_{32} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \frac{1}{2} = 2 - 1 = 1$$

Beispiel 130

$$f_2 = 0 + f_{32} \quad f_3 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} f_{23}$$

$$f_{23} = 1 \qquad f_{32} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} f_{32}$$

Gambler's Ruin Problem

Wir verifizieren $pf_{i+1,m} = f_{i,m} - qf_{i-1,m}$ für $1 \leq i < m$

$$\left(1 - \left(\tfrac{1-p}{p}\right)^i\right) - (1-p)\left(1 - \left(\tfrac{1-p}{p}\right)^{i-1}\right) = p - \left(\tfrac{1-p}{p}\right)^i + p\left(\tfrac{1-p}{p}\right)^i$$

$$= p - p\left(\tfrac{1-p}{p}\right)^{i+1} = p\left(1 - \left(\tfrac{1-p}{p}\right)^{i+1}\right)$$

Beispiel 131

$p = 1/2$

$d_{i+1} = 2d_i - d_{i-1} - 2$ für $1 \le i < m \qquad d_0 = 0 \qquad d_1 = \xi$

Lösung: $d_i = \xi i - i^2 + i$

Verifikation

$$\begin{aligned} & 2\xi i - 2i^2 + 2i - \xi(i-1) + (i-1)^2 - (i-1) - 2 \\ = \; & \xi(i+1) - i^2 + 1 - i + 1 - 2 \;=\; \xi(i+1) - i^2 - i \\ = \; & \xi(i+1) - (i+1)i \\ = \; & \xi(i+1) - (i+1)^2 + (i+1) \end{aligned}$$

$$d_m = \xi m - m^2 + m = 0 \quad \Longrightarrow \quad \xi = m - 1$$

$$d_i = (m-1)i - i^2 + i = mi - i^2 = i(m-i)$$

Satz 136

$$
\begin{aligned}
P^T\pi &= \begin{pmatrix} p_{0,0} & \cdots & p_{n-1,0} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{0,n-1} & \cdots & p_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= (\pi_0, \ldots, \pi_{n-1}) \begin{pmatrix} p_{0,0} & \cdots & p_{0,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n-1,0} & \cdots & p_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = \pi^T P
\end{aligned}
$$

Beispiel 145

$(n! \times n!)$-Matrix P

$$\begin{array}{cc} & \rho \\ \sigma & \left[\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ \cdots\cdots & 1/\binom{n}{2} & \\ & & \\ & & \end{array}\right] \end{array}$$