

Häufig verwendet man die Definition der **bedingten Wahrscheinlichkeit** in der Form

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[B|A] \cdot \Pr[A] = \Pr[A|B] \cdot \Pr[B] . \quad (1)$$

Damit:

Satz 16 (Multiplikationssatz)

Seien die Ereignisse A_1, \dots, A_n gegeben. Falls $\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] > 0$ ist, gilt

$$\begin{aligned} \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] = \\ \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdot \dots \\ \dots \cdot \Pr[A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}] . \end{aligned}$$

Beweis:

Zunächst halten wir fest, dass alle bedingten Wahrscheinlichkeiten wohldefiniert sind, da $\Pr[A_1] \geq \Pr[A_1 \cap A_2] \geq \dots \geq \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] > 0$.

Die rechte Seite der Aussage im Satz können wir umschreiben zu

$$\frac{\Pr[A_1]}{1} \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap A_2]}{\Pr[A_1]} \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]}{\Pr[A_1 \cap A_2]} \cdot \dots \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n]}{\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}]}$$

Offensichtlich kürzen sich alle Terme bis auf $\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n]$. □

Beispiel 17 (Geburtstagsproblem)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer m -köpfigen Gruppe zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?

Umformulierung:

Man werfe m Bälle zufällig und gleich wahrscheinlich in n Körbe. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Experiment jeder Ball allein in seinem Korb liegt?

Für das Geburtstagsproblem: $n = 365$

Offensichtlich muss $m \leq n$ sein, damit überhaupt jeder Ball allein in einem Korb liegen kann.

Wir nehmen an, dass die Bälle nacheinander geworfen werden. A_i bezeichne das Ereignis „Ball i landet in einem noch leeren Korb“. Das gesuchte Ereignis „Alle Bälle liegen allein in einem Korb“ bezeichnen wir mit A . Nach Satz 16 können wir $\Pr[A]$ berechnen durch

$$\begin{aligned}\Pr[A] &= \Pr[\cap_{i=1}^m A_i] \\ &= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \dots \cdot \Pr[A_m | \cap_{i=1}^{m-1} A_i].\end{aligned}$$

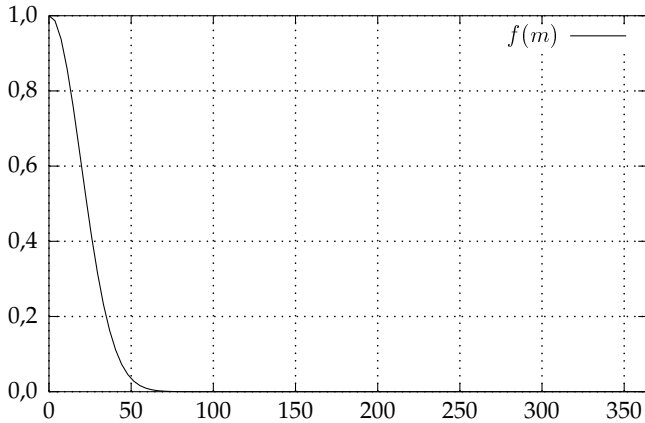
Unter der Bedingung, dass die ersten $j - 1$ Bälle jeweils in einem leeren Korb gelandet sind, bedeutet A_j , dass der j -te Ball in eine der $n - (j - 1)$ leeren Körbe fallen muss, die aus Symmetriegründen jeweils mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählt werden.

Daraus folgt

$$\Pr[A_j | \bigcap_{i=1}^{j-1} A_i] = \frac{n - (j - 1)}{n} = 1 - \frac{j - 1}{n}.$$

Mit der Abschätzung $1 - x \leq e^{-x}$ und wegen $\Pr[A_1] = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \Pr[A] &= \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \\ &\leq \prod_{j=2}^m e^{-(j-1)/n} = e^{-(1/n) \cdot \sum_{j=1}^{m-1} j} \\ &= e^{-m(m-1)/(2n)} =: f(m). \end{aligned}$$



Verlauf von $f(m)$ für $n = 365$

Ausgehend von der Darstellung der bedingten Wahrscheinlichkeit in Gleichung 1 zeigen wir:

Satz 18 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)

Die Ereignisse A_1, \dots, A_n seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$.
Dann folgt

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^n \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i] .$$

Analog gilt für paarweise disjunkte Ereignisse A_1, A_2, \dots mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i] .$$

Beweis:

Wir zeigen zunächst den endlichen Fall. Wir halten fest, dass

$$B = (B \cap A_1) \cup \dots \cup (B \cap A_n) .$$

Da für beliebige i, j mit $i \neq j$ gilt, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$, sind auch die Ereignisse $B \cap A_i$ und $B \cap A_j$ disjunkt. Wegen (1) folgt $\Pr[B \cap A_i] = \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]$ (auch für den Fall, dass $\Pr[A_i] = 0!$). Wir wenden nun den Additionssatz (Lemma 8, Teil 5) an

$$\begin{aligned} \Pr[B] &= \Pr[B \cap A_1] + \dots + \Pr[B \cap A_n] = \\ &\Pr[B|A_1] \cdot \Pr[A_1] + \dots + \Pr[B|A_n] \cdot \Pr[A_n] \end{aligned}$$

und haben damit die Behauptung gezeigt. Da der Additionssatz auch für unendlich viele Ereignisse A_1, A_2, \dots gilt, kann dieser Beweis direkt auf den unendlichen Fall übertragen werden. □

Mit Hilfe von Satz 18 erhalten wir leicht einen weiteren nützlichen Satz:

Satz 19 (Satz von Bayes)

Die Ereignisse A_1, \dots, A_n seien paarweise disjunkt, mit $\Pr[A_j] > 0$ für alle j . Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ ein Ereignis mit $\Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i = 1, \dots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]} .$$

Analog gilt für paarweise disjunkte Ereignisse A_1, A_2, \dots mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{\infty} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]} .$$

Mit dem Satz von Bayes dreht man gewissermaßen die Reihenfolge der Bedingung um. Gegeben die Wahrscheinlichkeit von B unter den Bedingungen A_i (sowie die Wahrscheinlichkeiten der A_i selbst), berechnet man die Wahrscheinlichkeit von A_i bedingt auf das Ereignis B .

Thomas Bayes (1702–1761) war ein bekannter Theologe und Mitglied der Royal Society. Als sein bedeutendstes Werk gilt sein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie „Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances“. Diese Arbeit wurde erst 1763 publiziert.

3. Unabhängigkeit

Bei einer bedingten Wahrscheinlichkeit $\Pr[A|B]$ kann der Fall auftreten, dass die Bedingung auf B , also das Vorwissen, dass B eintritt, keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit hat, mit der wir das Eintreten von A erwarten. Es gilt also $\Pr[A|B] = \Pr[A]$, und wir nennen dann die Ereignisse A und B **unabhängig**.

Beispiel 20 (Zweimaliges Würfeln)

$$\Omega := \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq 6\} .$$

Alle Elementarereignisse erhalten nach dem Prinzip von Laplace die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.

Wir definieren die Ereignisse

$A :=$ Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,

$B :=$ Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,

$C :=$ Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.

Es gilt $\Pr[A] = \Pr[B] = \frac{1}{2}$ und $\Pr[C] = \frac{1}{6}$. Wie groß ist $\Pr[B|A]$?

Beispiel 20 (Forts.)

Nach unserer Intuition beeinflusst der Ausgang des ersten Wurfs den zweiten Wurf nicht. Daher gewinnen wir durch das Eintreten von A keine Information in Bezug auf das Ereignis B hinzu:

$$B \cap A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}.$$

Daraus folgt

$$\Pr[B|A] = \frac{\Pr[B \cap A]}{\Pr[A]} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \Pr[B].$$

Das Eintreffen des Ereignisses B hat mit dem Ereignis A „nichts zu tun“.

Definition 21

Die Ereignisse A und B heißen **unabhängig**, wenn gilt

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B] .$$

Falls $\Pr[B] \neq 0$, so können wir diese Definition zu

$$\Pr[A] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \Pr[A|B]$$

umschreiben.

Beispiel 20 (Zweimaliges Würfeln, Forts.)

Zur Erinnerung:

$A :=$ Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,

$B :=$ Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,

$C :=$ Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.

Bei den Ereignissen A und B ist die Unabhängigkeit klar, da offensichtlich kein kausaler Zusammenhang zwischen den Ereignissen besteht. Wie steht es mit A und C ?

$$A \cap C = \{(2, 5), (4, 3), (6, 1)\}$$

und damit

$$\Pr[A \cap C] = \frac{3}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \Pr[A] \cdot \Pr[C] \text{ bzw. } \Pr[C|A] = \Pr[C] .$$

Beispiel 20 (Forts.)

Also sind auch A und C (und analog B und C) unabhängig.

Bemerkung: Im Beispiel ist $A \cap C \neq \emptyset$.

Es gilt sogar allgemein für zwei unabhängige Ereignisse A und B mit $\Pr[A], \Pr[B] > 0$, dass sie gar nicht disjunkt sein können, da ansonsten

$$0 = \Pr[\emptyset] = \Pr[A \cap B] \neq \Pr[A] \cdot \Pr[B] .$$

Beispiel 20 (Zweimaliges Würfeln (Forts.))

Zur Erinnerung:

$A :=$ Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,

$B :=$ Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,

$C :=$ Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.

Wir betrachten das Ereignis $A \cap B \cap C$. Wenn $A \cap B$ eintritt, so sind beide gewürfelten Augenzahlen gerade und somit ergibt auch die Summe davon eine gerade Zahl. Daraus folgt $\Pr[A \cap B \cap C] = 0$ bzw. $\Pr[C|A \cap B] = 0 \neq \Pr[C]$. Das Ereignis $A \cap B$ liefert uns also Information über das Ereignis C .

Definition 22

Die paarweise verschiedenen Ereignisse A_1, \dots, A_n heißen **unabhängig**, wenn für alle Teilmengen $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_{i_k}]. \quad (2)$$

Eine unendliche Familie von paarweise verschiedenen Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heißt unabhängig, wenn (2) für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Lemma 23

Die (paarweise verschiedenen) Ereignisse A_1, \dots, A_n sind genau dann unabhängig, wenn für alle $(s_1, \dots, s_n) \in \{0, 1\}^n$ gilt, dass

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] = \Pr[A_1^{s_1}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}], \quad (3)$$

wobei $A_i^0 = \bar{A}_i$ und $A_i^1 = A_i$.

Beweis:

Zunächst zeigen wir, dass aus (2) die Bedingung (3) folgt. Wir beweisen dies durch Induktion über die Anzahl der Nullen in s_1, \dots, s_n . Wenn $s_1 = \dots = s_n = 1$ gilt, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls gelte ohne Einschränkung $s_1 = 0$. Aus dem Additionssatz folgt dann

$$\begin{aligned}\Pr[\bar{A}_1 \cap A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] &= \Pr[A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] \\ &\quad - \Pr[A_1 \cap A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}].\end{aligned}$$

Darauf können wir die Induktionsannahme anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\Pr[\bar{A}_1 \cap A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] &= \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] - \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] \\ &= (1 - \Pr[A_1]) \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}],\end{aligned}$$

woraus die Behauptung wegen $1 - \Pr[A_1] = \Pr[\bar{A}_1]$ folgt.

Beweis (Forts.):

Für die Gegenrichtung zeigen wir nur, dass aus (3) $\Pr[A_1 \cap A_2] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2]$ folgt. Es gilt wegen des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit, dass

$$\begin{aligned}\Pr[A_1 \cap A_2] &= \sum_{s_3, \dots, s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3^{s_3} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] \\ &= \sum_{s_3, \dots, s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2] \cdot \Pr[A_3^{s_3}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] \\ &= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2] \cdot \sum_{s_3=0,1} \Pr[A_3^{s_3}] \cdot \dots \cdot \sum_{s_n=0,1} \Pr[A_n^{s_n}] \\ &= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2],\end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung. □

Aus der Darstellung in Lemma 23 folgt die wichtige Beobachtung, dass für zwei unabhängige Ereignisse A und B auch die Ereignisse \bar{A} und B (und analog auch A und \bar{B} bzw. \bar{A} und \bar{B}) unabhängig sind!

Ebenso folgt:

Lemma 24

Seien A , B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig.

Beweis:

Die Unabhängigkeit von $A \cap B$ und C folgt unmittelbar aus Definition 22.

Aus

$$\begin{aligned}\Pr[(A \cup B) \cap C] &= \Pr[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= \Pr[A \cap C] + \Pr[B \cap C] - \Pr[A \cap B \cap C] \\ &= \Pr[C] \cdot (\Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]) \\ &= \Pr[A \cup B] \cdot \Pr[C]\end{aligned}$$

folgt die Unabhängigkeit von $A \cup B$ und C . □

4. Zufallsvariablen

4.1 Grundlagen

Anstatt der Ereignisse selbst sind wir oft an „Auswirkungen“ oder „Merkmalen“ der (Elementar)Ereignisse interessiert.

Definition 25

Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum auf der Ergebnismenge Ω gegeben. Eine Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt (numerische) Zufallsvariable.

Eine Zufallsvariable X über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge Ω heißt **diskret**.

Bei diskreten Zufallsvariablen ist der **Wertebereich**

$$W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}; \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}$$

ebenfalls wieder endlich (bzw. abzählbar unendlich).

Beispiel 26

Wir werfen eine ideale Münze drei Mal. Als Ergebnismenge erhalten wir $\Omega := \{H, T\}^3$. Die Zufallsvariable Y bezeichne die Gesamtanzahl der Würfe mit Ergebnis „Head“.

Beispielsweise gilt also $Y(HTH) = 2$ und $Y(HHH) = 3$. Y hat den Wertebereich $W_Y = \{0, 1, 2, 3\}$.

Für $W_X = \{x_1, \dots, x_n\}$ bzw. $W_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ betrachten wir (für ein beliebiges $1 \leq i \leq n$ bzw. $x_i \in \mathbb{N}$) das Ereignis

$$A_i := \{\omega \in \Omega; X(\omega) = x_i\} = X^{-1}(x_i).$$

Bemerkung: Anstelle von $\Pr[X^{-1}(x_i)]$ verwendet man häufig auch die Schreibweise $\Pr[„X = x_i“]$. Analog setzt man

$$\begin{aligned} \Pr[„X \leq x_i“] &= \sum_{x \in W_X : x \leq x_i} \Pr[„X = x“] \\ &= \Pr[\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x_i\}]. \end{aligned}$$

Oft lässt man auch die Anführungszeichen weg.

Definition 27

- Die Funktion

$$f_X : \mathbb{R} \ni x \mapsto \Pr[X = x] \in [0, 1] \quad (4)$$

nennt man **(diskrete) Dichte(funktion)** der Zufallsvariablen X .

- Die Funktion

$$F_X : \mathbb{R} \ni x \mapsto \Pr[X \leq x] = \sum_{x' \in W_X : x' \leq x} \Pr[X = x'] \in [0, 1] \quad (5)$$

heißt **Verteilung(sfunktion)** der Zufallsvariablen X .

Beispiel 28

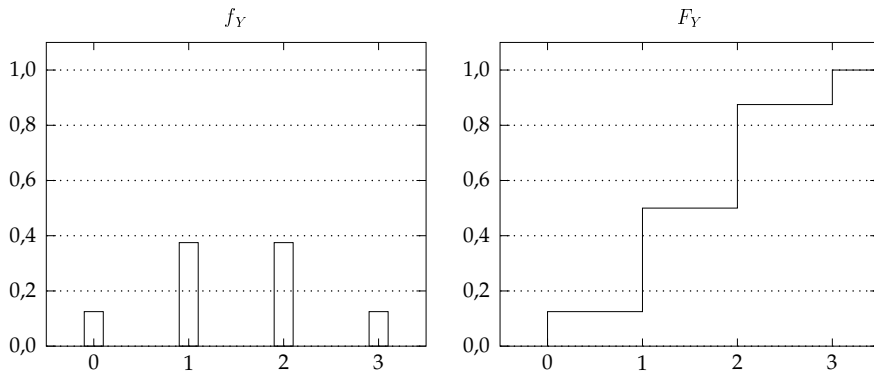
Für die Zufallsvariable Y erhalten wir

$$\Pr[Y = 0] = \Pr[TTT] = \frac{1}{8},$$

$$\Pr[Y = 1] = \Pr[H TT] + \Pr[T HT] + \Pr[T T H] = \frac{3}{8},$$

$$\Pr[Y = 2] = \Pr[H H T] + \Pr[H T H] + \Pr[T H H] = \frac{3}{8},$$

$$\Pr[Y = 3] = \Pr[H H H] = \frac{1}{8}.$$



Dichte und Verteilung von Y

Bemerkung: Man kann statt Ω auch den zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum über W_X betrachten.