

Übung 3: Aussagenlogik

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

8. Januar 2014

Definition (Syntax der Aussagenlogik)

Aussagenlogische **Formeln** bestehen aus Konstanten, Variablen und Operatoren. Die Menge \mathcal{F} aller Formeln ist induktiv definiert.

■ $\text{false} = 0 = \perp \in \mathcal{F}$, $\text{true} = 1 = \top \in \mathcal{F}$ (Konstanten)

■ $V = \{a, b, c, \dots\} \subseteq \mathcal{F}$ (Variablen)

■ Ist $A \in \mathcal{F}$ eine aussagenlogische Formel, dann auch

$\neg A \in \mathcal{F}$ (Negation)

■ Sind $A, B \in \mathcal{F}$ aussagenlogische Formeln, dann auch

$(A \wedge B) \in \mathcal{F}$ (Konjunktion)

$(A \vee B) \in \mathcal{F}$ (Disjunktion)

$(A \rightarrow B) \in \mathcal{F}$ (Implikation)

Alle Formeln lassen sich so konstruieren.

Definition (Bindungsregeln)

Die **Bindungsstärke** der Operatoren in absteigender Reihenfolge ist

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$$

Die Implikation ist **rechtsassoziativ**

$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \text{ steht für } (a \rightarrow (b \rightarrow (c \rightarrow d)))$$

- Üblicherweise klammert man \wedge und \vee

$$(a \wedge b) \vee c \text{ statt } a \wedge b \vee c$$

Beispiel

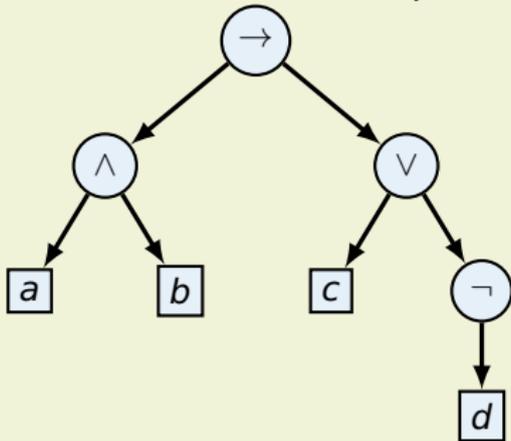
- $\neg a \wedge b$ steht für $((\neg a) \wedge b)$
- $a \wedge b \rightarrow c \vee \neg d$ steht für $((a \wedge b) \rightarrow (c \vee (\neg d)))$

Syntaxbaum

Syntaxbäume visualisieren in welcher Reihenfolge die Regeln zur induktiven Definition angewandt werden müssen, um eine Formel zu erzeugen.

Beispiel

Sei $F := a \wedge b \rightarrow c \vee \neg d$ dann ist der dazu passende Syntaxbaum



Definition (Belegung)

Eine passende **Belegung** β zu einer Formel F ordnet jeder Variable in V einen Wahrheitswert aus $\{0, 1\}$ zu. Es ist

$$\beta : V \rightarrow \{0, 1\}$$

- Belegungen formalisieren Einsetzen
- Für n Variablen existieren 2^n Belegungen

Beispiel

Sei $F := \neg(a \wedge b)$ mit $V = \{a, b\}$ und

$$\beta : \{a, b\} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$a \mapsto 1$$

$$b \mapsto 0$$

Dann ist β eine zu F passende **Belegung**.

Definition (Semantik einer Formel)

Die **Semantik** $[F]$ einer aussagenlogischen Formel F ist eine Funktion, die jeder passenden Belegung β einen Wahrheitswert zuordnet. Sei $\mathcal{B} = \{\beta_0, \beta_1, \dots\}$ die Menge aller Belegungen zu F . Dann ist

$$[F] : \mathcal{B} \rightarrow \{0, 1\}$$

- Die Semantik löst eingesetzte Formeln auf
- Wird anhand der induktiven Syntax definiert
- Es gibt **syntaktisch verschiedene** Formeln gleicher **Semantik**

Beispiel

Sei $F := (G \rightarrow H)$ mit G, H Formeln. Dann ist

$$[F](\beta) = \begin{cases} 0 & \text{falls } [G](\beta) = 1 \text{ und } [H](\beta) = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wahrheitstabelle

Die Semantik einer Formel kann mit Hilfe einer **Wahrheitstabelle** visualisiert werden. Die Tabelle gibt den Wahrheitswert der Formel für jede mögliche Belegung an.

Beispiel

Sei $F := a \vee b \rightarrow \neg c \wedge b$. Die zu $[F]$ gehörige Wahrheitstabelle ist

a	b	c	$a \vee b$	\rightarrow	$\neg c$	\wedge	b
0	0	0	0	1	1	0	
0	0	1	0	1	0	0	
0	1	0	1	1	1	1	
0	1	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	0	1	0	
1	0	1	1	0	0	0	
1	1	0	1	1	1	1	
1	1	1	1	0	0	0	

Wahrheitstabelle

Die Semantik einer Formel kann mit Hilfe einer **Wahrheitstabelle** visualisiert werden. Die Tabelle gibt den Wahrheitswert der Formel für jede mögliche Belegung an.

Beispiel

Sei $F := a \vee b \rightarrow \neg c \wedge b$. Die zu $[F]$ gehörige Wahrheitstabelle ist

a	b	c	$a \vee b$	\rightarrow	$\neg c$	\wedge	b
0	0	0	0	1	1	0	
0	0	1	0	1	0	0	
0	1	0	1	1	1	1	
0	1	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	0	1	0	
1	0	1	1	0	0	0	
1	1	0	1	1	1	1	
1	1	1	1	0	0	0	

Wahrheitstabelle

Die Semantik einer Formel kann mit Hilfe einer **Wahrheitstabelle** visualisiert werden. Die Tabelle gibt den Wahrheitswert der Formel für jede mögliche Belegung an.

Beispiel

Sei $F := a \vee b \rightarrow \neg c \wedge b$. Die zu $[F]$ gehörige Wahrheitstabelle ist

a	b	c	$a \vee b$	\rightarrow	$\neg c$	\wedge	b
0	0	0	0	1	1	0	
0	0	1	0	1	0	0	
0	1	0	1	1	1	1	
0	1	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	0	1	0	
1	0	1	1	0	0	0	
1	1	0	1	1	1	1	
1	1	1	1	0	0	0	

Definition (Äquivalente Formeln)

Man nennt zwei Formeln **äquivalent**, wenn sie dieselbe Semantik besitzen.

Seien F, G Formeln mit Belegungen $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F = \mathcal{B}_G$. F und G sind äquivalent wenn

$$\forall \beta \in \mathcal{B}. [F](\beta) = [G](\beta)$$

Man schreibt $F \equiv G$ oder $F \leftrightarrow G$.

Beispiel

Für $F := a \rightarrow b$ und $G := \neg a \vee b$ gilt $F \equiv G$.

a	b	$a \rightarrow b$	$\neg a$	\vee	b
0	0	1	1	1	
0	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	
1	1	1	0	1	

Eigenschaften aussagenlogischer Formeln

Sei F eine aussagenlogische Formel mit Variablen V und der Menge der passenden Belegungen \mathcal{B} . Man nennt F

erfüllbar $\exists \beta \in \mathcal{B}. [F](\beta) = 1$ (F kann wahr sein)

unerfüllbar $\forall \beta \in \mathcal{B}. [F](\beta) = 0$ (F ist nie wahr)

gültig $\forall \beta \in \mathcal{B}. [F](\beta) = 1$ (F ist immer wahr)

- Eine unerfüllbare Formel nennt man **Widerspruch**
- Eine gültige Formel nennt man **Tautologie**