

Die Funktion

$$f_{X,Y}(x, y) := \Pr[X = x, Y = y]$$

heißt **gemeinsame Dichte** der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ .

Aus der gemeinsamen Dichte  $f_{X,Y}$  kann man ableiten

$$f_X(x) = \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x, y) \quad \text{bzw.} \quad f_Y(y) = \sum_{x \in W_X} f_{X,Y}(x, y).$$

Die Funktionen  $f_X$  und  $f_Y$  nennt man **Randdichten**.

Die Ereignisse „ $Y = y$ “ bilden eine Partitionierung des Wahrscheinlichkeitsraumes, und es gilt daher

$$\Pr[X = x] = \sum_{y \in W_Y} \Pr[X = x, Y = y] = f_X(x).$$

Die Dichten der einzelnen Zufallsvariablen entsprechen also genau den Randdichten.

Für zwei Zufallsvariablen definiert man die **gemeinsame Verteilung**

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x, y) &= \Pr[X \leq x, Y \leq y] = \Pr[\{\omega; X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\}] \\ &= \sum_{x' \leq x} \sum_{y' \leq y} f_{X,Y}(x', y'). \end{aligned}$$

Die **Randverteilung** ergibt sich gemäß

$$F_X(x) = \sum_{x' \leq x} f_X(x') = \sum_{x' \leq x} \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x', y)$$

sowie

$$F_Y(y) = \sum_{y' \leq y} f_Y(y') = \sum_{y' \leq y} \sum_{x \in W_X} f_{X,Y}(x, y').$$

### 4.3.1 Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

#### Definition 45

Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  heißen unabhängig, wenn für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in W_{X_1} \times \dots \times W_{X_n}$  gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n = x_n].$$

Alternativ:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n).$$

Bei unabhängigen Zufallsvariablen ist also die gemeinsame Dichte gleich dem Produkt der Randdichten. Ebenso gilt

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n).$$

## Satz 46

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsvariablen und  $S_1, \dots, S_n$  beliebige Mengen mit  $S_i \subseteq W_{X_i}$ . Dann sind die Ereignisse „ $X_1 \in S_1$ “,  $\dots$ , „ $X_n \in S_n$ “ unabhängig.

Beweis:

$$\begin{aligned} & \Pr[X_1 \in S_1, \dots, X_n \in S_n] \\ &= \sum_{x_1 \in S_1} \dots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] \\ &\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x_1 \in S_1} \dots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n = x_n] \\ &= \left( \sum_{x_1 \in S_1} \Pr[X_1 = x_1] \right) \cdot \dots \cdot \left( \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_n = x_n] \right) \\ &= \Pr[X_1 \in S_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n \in S_n]. \end{aligned}$$

□

## Satz 47

Seien  $f_1, \dots, f_n$  reellwertige Funktionen ( $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  für  $i = 1, \dots, n$ ). Wenn die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig sind, dann gilt dies auch für  $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ .

### Beweis:

Sei  $z_i \in W_{f_i(X_i)}$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $S_i = \{x; f_i(x) = z_i\}$ .

$$\begin{aligned} & \Pr[f_1(X_1) = z_1, \dots, f_n(X_n) = z_n] \\ &= \Pr[X_1 \in S_1, \dots, X_n \in S_n] \\ &\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \Pr[X_1 \in S_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n \in S_n] \\ &= \Pr[f_1(X_1) = z_1] \cdot \dots \cdot \Pr[f_n(X_n) = z_n]. \end{aligned}$$



## 4.3.2 Zusammengesetzte Zufallsvariablen

### Beispiel 48

Ein Würfel werde zweimal geworfen.  $X$  bzw.  $Y$  bezeichne die Augenzahl im ersten bzw. zweiten Wurf. Sei  $Z := X + Y$  die Summe der gewürfelten Augenzahlen.

Für  $Z$  gilt z.B.:

$$\Pr[Z = 1] = \Pr[\emptyset] = 0, \Pr[Z = 4] = \Pr[\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}] = \frac{3}{36}.$$

Für die Verteilung der Summe zweier unabhängiger Zufallsvariablen gilt der folgende Satz:

### Satz 49

*Für zwei unabhängige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sei  $Z := X + Y$ . Es gilt*

$$f_Z(z) = \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x).$$



## Beweis:

Mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt, dass

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \Pr[Z = z] = \sum_{x \in W_X} \Pr[X + Y = z \mid X = x] \cdot \Pr[X = x] \\ &= \sum_{x \in W_X} \Pr[Y = z - x] \cdot \Pr[X = x] \\ &= \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x). \end{aligned}$$



Den Ausdruck  $\sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)$  aus Satz 49 nennt man in Analogie zu den entsprechenden Begriffen bei Potenzreihen auch **Faltung** oder **Konvolution** der Dichten  $f_X$  und  $f_Y$ .

## Beispiel (Forts.)

Berechne die Dichte von  $Z = X + Y$ :

$$\begin{aligned}\Pr[Z = z] &= \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = z - x] \\ &= \sum_{x=1}^6 \frac{1}{6} \cdot \Pr[Y = z - x] = \sum_{x=\max\{1, z-6\}}^{\min\{6, z-1\}} \frac{1}{36}.\end{aligned}$$

Für  $2 \leq z \leq 7$  erhalten wir

$$\Pr[Z = z] = \sum_{i=1}^{z-1} \frac{1}{36} = \frac{z-1}{36}.$$

Und für  $7 < z \leq 12$ :

$$\Pr[Z = z] = \frac{13-z}{36}.$$

### 4.3.3 Momente zusammengesetzter Zufallsvariablen

#### Satz 50 (Linearität des Erwartungswerts)

Für Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  und  $X := a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$  mit  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \mathbb{E}[X_n].$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} (a_1 \cdot X_1(\omega) + \dots + a_n \cdot X_n(\omega)) \cdot \Pr[\omega] \\ &= a_1 \cdot \left( \sum_{\omega \in \Omega} X_1(\omega) \cdot \Pr[\omega] \right) + \dots + a_n \cdot \left( \sum_{\omega \in \Omega} X_n(\omega) \cdot \Pr[\omega] \right) \\ &= a_1 \cdot \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \cdot \mathbb{E}[X_n].\end{aligned}$$

□

## Beispiel 51

$n$  betrunkene Seeleute torkeln nach dem Landgang in ihre Kojen. Sie haben völlig die Orientierung verloren, weshalb wir annehmen, dass jede Zuordnung der Seeleute zu den  $n$  Betten gleich wahrscheinlich ist (genau ein Seemann pro Bett). Wie viele Seeleute liegen im Mittel im richtigen Bett?

Die Anzahl der Seeleute im richtigen Bett zählen wir mit der Zufallsvariablen  $X$ , die als Summe der Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  dargestellt wird, wobei

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{falls Seemann } i \text{ in seinem Bett liegt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar gilt  $X := X_1 + \dots + X_n$ .

## Beispiel 51

Für die Variablen  $X_i$  erhalten wir  $\Pr[X_i = 1] = \frac{1}{n}$ , da jedes Bett von Seemann  $i$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit aufgesucht wird.

Daraus folgt

$$\mathbb{E}[X_i] = 0 \cdot \Pr[X_i = 0] + 1 \cdot \Pr[X_i = 1] = \frac{1}{n},$$

und somit

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

Im Mittel hat also nur ein Seemann sein eigenes Bett aufgesucht.

## Satz 52 (Multiplikativität des Erwartungswerts)

Für *unabhängige* Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  gilt

$$\mathbb{E}[X_1 \cdots X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdots \mathbb{E}[X_n].$$

### Beweis:

Wir beweisen den Fall  $n = 2$ . Der allgemeine Fall ist analog.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \cdot Y] &= \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x, Y = y] \\ &\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = y] \\ &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] \sum_{y \in W_Y} y \cdot \Pr[Y = y] \\ &= \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].\end{aligned}$$

□

Dass für die Gültigkeit von Satz 52 die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen wirklich notwendig ist, sieht man beispielsweise am Fall  $Y = -X$  für eine Zufallsvariable mit einer von Null verschiedenen Varianz. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = -\mathbb{E}[X^2] \neq -(\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

## Definition 53

Zu einem Ereignis  $A$  heißt die Zufallsvariable

$$I_A := \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ eintritt,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Indikatorvariable des Ereignisses  $A$ .

### Beobachtung:

Für die Indikatorvariable  $I_A$  gilt nach Definition

$$\mathbb{E}[I_A] = 1 \cdot \Pr[A] + 0 \cdot \Pr[\bar{A}] = \Pr[A].$$

Ebenso gilt

$$\mathbb{E}[I_{A_1} \cdot \dots \cdot I_{A_n}] = \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n],$$

da das Produkt von Indikatorvariablen genau dann gleich 1 ist, wenn alle entsprechenden Ereignisse eintreten.



## Beispiel (Forts.)

Wir betrachten wieder das Beispiel der total betrunkenen Matrosen.

Sei  $A_i$  das Ereignis, dass der  $i$ -te Seemann im richtigen Bett liegt. Mit der Notation der Indikatorvariablen sei  $X_i = I_{A_i}$ . Dann gilt für beliebige  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ :

$$\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{E}[I_{A_i} I_{A_j}] = \Pr[A_i \cap A_j] = \frac{1}{n(n-1)},$$

sowie

$$\mathbb{E}[X_i^2] = 0^2 \cdot \Pr[\bar{A}_i] + 1^2 \cdot \Pr[A_i] = \Pr[A_i] = 1/n.$$

## Beispiel (Forts.)

Daraus folgt wegen der Linearität des Erwartungswerts für  $X = X_1 + \dots + X_n$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} X_i X_j \right] \\ &= n \cdot \frac{1}{n} + n(n-1) \cdot \frac{1}{n(n-1)} = 2.\end{aligned}$$

Für die Varianz erhalten wir somit den Wert

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 2 - 1 = 1.$$

Einfacher Beweis für Satz 9 mit Hilfe von Indikatorvariablen:

Zur Erinnerung:

### Satz 9 (Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion)

Für Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  ( $n \geq 2$ ) gilt:

$$\begin{aligned} \Pr \left[ \bigcup_{i=1}^n A_i \right] &= \sum_{i=1}^n \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + \dots \\ &+ (-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}] + \dots \\ &+ (-1)^{n-1} \cdot \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] . \end{aligned}$$

## Beweis:

Zur Erinnerung: Zu Ereignissen  $A_1, \dots, A_n$  wollen wir die Wahrscheinlichkeit  $\Pr[B]$  des Ereignisses  $B := A_1 \cup \dots \cup A_n$  ermitteln.

Wir betrachten die Indikatorvariablen  $I_i := I_{A_i}$  der Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  und die Indikatorvariable  $I_{\bar{B}}$  des Ereignisses  $\bar{B}$ .

Das Produkt  $\prod_{i=1}^n (1 - I_i)$  ist genau dann gleich 1, wenn  $I_1 = \dots = I_n = 0$ , d.h. wenn  $B$  nicht eintritt. Somit gilt  $I_{\bar{B}} = \prod_{i=1}^n (1 - I_i)$  und wir erhalten:

$$I_{\bar{B}} = 1 - \sum_{1 \leq i \leq n} I_i + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} I_{i_1} I_{i_2} - \dots + (-1)^n I_1 \cdot \dots \cdot I_n,$$

also

$$\begin{aligned} I_B &= 1 - I_{\bar{B}} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} I_i - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} I_{i_1} I_{i_2} + \dots + (-1)^{n-1} I_1 \cdot \dots \cdot I_n. \end{aligned}$$

## Beweis:

Wegen der Eigenschaften von Indikatorvariablen gilt

$$\Pr[B] = 1 - \Pr[\bar{B}] = 1 - \mathbb{E}[I_{\bar{B}}].$$

Mit Hilfe von Satz 50 „verteilen“ wir den Erwartungswert auf die einzelnen Produkte von Indikatorvariablen. Wenn wir nun  $\mathbb{E}[I_i]$  durch  $\Pr[A_i]$  und allgemein  $\mathbb{E}[I_{i_1} \cdot \dots \cdot I_{i_k}]$  durch  $\Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}]$  ersetzen, haben wir Satz 9 (dieses Mal vollständig) bewiesen. □

## Satz 54

Für unabhängige Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  und  $X := X_1 + \dots + X_n$  gilt

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n].$$

### Beweis:

Wir betrachten nur den Fall  $n = 2$  mit den Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ .

$$\mathbb{E}[(X + Y)^2] = \mathbb{E}[X^2 + 2XY + Y^2] = \mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y^2]$$

$$\mathbb{E}[X + Y]^2 = (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])^2 = \mathbb{E}[X]^2 + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2$$

Wir ziehen die zweite Gleichung von der ersten ab und erhalten

$$\mathbb{E}[(X + Y)^2] - \mathbb{E}[X + Y]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2.$$

Mit Hilfe von Satz 39 folgt die Behauptung. □

Für abhängige Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  gilt Satz 54 im Allgemeinen nicht. Als Beispiel funktioniert wiederum der Fall  $X = -Y$ :

$$\text{Var}[X + Y] = 0 \neq 2 \cdot \text{Var}[X] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y].$$

## 5. Wichtige diskrete Verteilungen

Wir diskutieren nun einige wichtige *diskrete* Verteilungen. Bei diesen Verteilungen handelt es sich um Funktionen, die von gewissen *Parametern* abhängen. Eigentlich betrachten wir also immer eine ganze Familie von ähnlichen Verteilungen.



## 5.1 Bernoulli-Verteilung

Eine Zufallsvariable  $X$  mit  $W_X = \{0, 1\}$  und der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} p & \text{für } x = 1, \\ 1 - p & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

heißt **Bernoulli-verteilt**. Den Parameter  $p$  nennen wir **Erfolgswahrscheinlichkeit**.

Eine solche Verteilung erhält man z.B. bei einer einzelnen Indikatorvariablen. Es gilt mit  $q := 1 - p$

$$\mathbb{E}[X] = p \text{ und } \text{Var}[X] = pq,$$

wegen  $\mathbb{E}[X^2] = p$  und  $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = p - p^2$ .

Der Name der Bernoulli-Verteilung geht zurück auf den Schweizer Mathematiker **Jakob Bernoulli** (1654–1705). Wie viele andere Mathematiker seiner Zeit hätte auch Bernoulli nach dem Wunsch seines Vaters ursprünglich Theologe werden sollen. Sein Werk *ars conjectandi* stellt eine der ersten Arbeiten dar, die sich mit dem Teil der Mathematik beschäftigen, den wir heute als Wahrscheinlichkeitstheorie bezeichnen.

## 5.2 Binomialverteilung

Eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable entspricht der Verteilung *einer* Indikatorvariablen. Häufig betrachtet man jedoch Summen von Indikatorvariablen.

### Definition 55

Sei  $X := X_1 + \dots + X_n$  als Summe von  $n$  unabhängigen, Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  definiert. Dann heißt  $X$  **binomialverteilt** mit den Parametern  $n$  und  $p$ . In Zeichen schreiben wir

$$X \sim \text{Bin}(n, p).$$

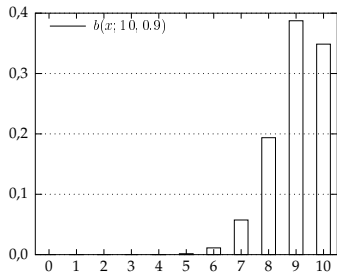
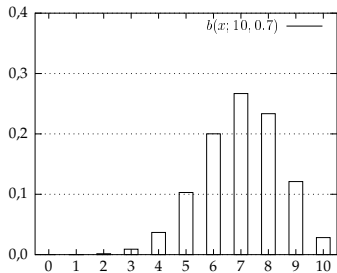
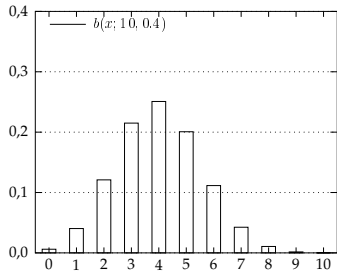
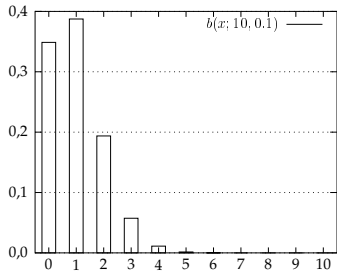
Es gilt  $W_X = \{0, \dots, n\}$ . Die Binomialverteilung besitzt die Dichte

$$f_X(x) := b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

mit  $q := 1 - p$ . Da die Binomialverteilung eine sehr wichtige Rolle spielt, führen wir für die Dichtefunktion die Abkürzung  $b(x; n, p)$  ein.

Mit den Sätzen über Erwartungswert und Varianz von Summen unabhängiger Zufallsvariablen erhalten wir sofort

$$\mathbb{E}[X] = np \quad \text{und} \quad \text{Var}[X] = npq.$$



Dichte der Binomialverteilung

## Satz 56

Wenn  $X \sim \text{Bin}(n_x, p)$  und  $Y \sim \text{Bin}(n_y, p)$  unabhängig sind, dann gilt für  $Z := X + Y$ , dass  $Z \sim \text{Bin}(n_x + n_y, p)$ .

### Beweis:

Die Aussage folgt sofort, wenn man gemäß der Definition der Binomialverteilung  $X$  und  $Y$  als Summen von Indikatorvariablen darstellt.  $Z$  ist dann offensichtlich wieder eine Summe von unabhängigen Indikatorvariablen. □

### 5.3 Geometrische Verteilung

Man betrachte ein Experiment, das so lange wiederholt wird, bis Erfolg eintritt. Gelingt ein einzelner Versuch mit Wahrscheinlichkeit  $p$ , so ist die Anzahl der Versuche bis zum Erfolg geometrisch verteilt.

#### Definition 57

Eine **geometrisch verteilte** Zufallsvariable  $X$  mit Parameter (Erfolgswahrscheinlichkeit)  $p \in [0, 1]$  und  $q := 1 - p$  hat die Dichte

$$f_X(i) = pq^{i-1} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}.$$

Für Erwartungswert und Varianz geometrisch verteilter Zufallsvariablen gilt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} \quad \text{und} \quad \text{Var}[X] = \frac{q}{p^2}.$$

Es gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot pq^{i-1} = p \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot q^{i-1} = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot pq^{i-1} \\ &= p \cdot \left( \sum_{i=1}^{\infty} i(i+1) \cdot q^{i-1} - \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot q^{i-1} \right) \\ &= p \cdot \left( \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p^2} \right) = \frac{2-p}{p^2},\end{aligned}$$

und damit

$$\text{Var}[X] = \frac{q}{p^2}.$$