

4.8 Summation und Differenzenoperator

4.8.1 Direkte Methoden

1. Indextransformation:

Sei $i \geq 0$, dann gilt:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^{k=n} a_k = \sum_{k-i=m}^{k-i=n} a_{k-i} = \sum_{k=m+i}^{k=n+i} a_{k-i} = \sum_{k=m+i}^{n+i} a_{k-i}$$

Beispiel 195

$$S_n = 0 \cdot a + 1 \cdot a + 2 \cdot a + \cdots + n \cdot a = \sum_{k=0}^n k \cdot a$$

Indextransformation: $k \mapsto n - k$

$$S_n = \sum_{k=0}^n (n - k) \cdot a$$

Beispiel (Forts.)

$$S_n = \sum_{k=0}^n (n - k) \cdot a$$

also:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n k \cdot a + \sum_{k=0}^n (n - k) \cdot a \right) \\ &= \frac{n \cdot a}{2} \cdot \sum_{k=0}^n 1 \\ &= \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \cdot a = \binom{n + 1}{2} \cdot a \end{aligned}$$

2. Induktion

Beispiel 196

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k - 1)$$

Nach Berechnen einiger Werte

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 4$$

$$S_3 = 9$$

vermutet man:

$$S_n = n^2$$

Beispiel (Forts.)

Behauptung:

$$S_n = n^2$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $n = 1$ trivial

Induktionsschluss: $n \mapsto n + 1$

$$S_{n+1} = S_n + 2 \cdot (n + 1) - 1 \stackrel{\text{IA}}{=} n^2 + 2 \cdot n + 1 = (n + 1)^2$$

Beispiel 197

Seien $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$.

Das arithmetische Mittel A der a_i :

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

Das geometrische Mittel G der a_i :

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$$

Das harmonische Mittel H der a_i :

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$$

Wir wollen zeigen: $G \leq A$.

Beispiel (Forts.)

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $n = 1$ trivial, $n = 2$ durch Einsetzen:

$$\begin{aligned}(G \leq A) &\iff \left(\sqrt{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \right) \\ &\iff (4a_1 \cdot a_2 \leq (a_1 + a_2)^2) \\ &\iff (0 \leq a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 = (a_1 - a_2)^2)\end{aligned}$$

Induktionsschluss:

Wir zeigen:

$$(P_n \wedge P_2) \Rightarrow P_{n+1}$$

Sei

$$b := \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} a_i .$$

Es gilt:

Beispiel (Forts.)

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i \right) \cdot b^{n-1} &= \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \cdot (a_{n+1} \cdot b^{n-1}) \\ &\stackrel{P_n}{\leq} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right)^n \cdot \left(\frac{1}{n} (a_{n+1} + (n-1)b) \right)^n \\ &= \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\frac{1}{n} (a_{n+1} + (n-1)b) \right) \right]^n \\ &\stackrel{P_2}{\leq} \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i + \frac{1}{n} (a_{n+1} + (n-1)b) \right) \right) \right]^n \\ &= \left[\frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i + (n-1)b \right) \right]^{2n} \\ &= b^{2n}. \end{aligned}$$

Beispiel (Forts.)

*Eine zweite Beweisvariante verwendet ein etwas ungewöhnliches Induktionsverfahren!
Wir zeigen den Induktionsanfang wie oben und dann für den Induktionsschluss:*

① $P_n \Rightarrow P_{n-1}$

② $(P_n \wedge P_2) \Rightarrow P_{2n}$

Beispiel (Forts.)

④ Sei

$$b := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i.$$

Damit:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{n-1} &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right) \cdot b \stackrel{P_n}{\leq} \left(\frac{1}{n} \left(b + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right) \right)^n \\ &= \left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right)^n = \left(\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right)^n \\ &\Rightarrow \prod_{i=1}^{n-1} a_i \leq \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right)^{n-1} \Rightarrow P_{n-1} \end{aligned}$$

Beispiel (Forts.)

② Es gilt:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{2n} a_i &= \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\prod_{i=n+1}^{2n} a_i \right) \\ &\stackrel{P_n}{\leq} \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{n} \right)^n \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n} \right)^n \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{n} \right) \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n} \right) \right)^n \\ &\stackrel{P_2}{\leq} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i}{n} \right)^{2n} = \left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} a_i \right)^{2n} \\ &\Rightarrow P_{2n}\end{aligned}$$



4.8.2 Differenzenoperator

Definition 198

Sei f eine Funktion von \mathbb{Z} nach \mathbb{C} . Der Operator

$$E : f \mapsto E(f)$$

mit $E(f)(x) := f(x + 1)$ heißt **Translationsoperator**.

$$\Delta : f \mapsto \Delta(f)$$

mit $\Delta(f)(x) := f(x + 1) - f(x)$ heißt **(Vorwärts-)Differenzenoperator**.

$$\nabla : f \mapsto \nabla(f)$$

mit $\nabla(f)(x) := f(x) - f(x - 1)$ heißt **(Rückwärts-)Differenzenoperator**.

Mit I als dem Identitätsoperator, (also $I(f) = f$) gilt damit

$$\Delta(f) = (E - I)(f)$$

$$\nabla(f) = (I - E^{-1})(f)$$

Beispiel 199

Sei $a \in \mathbb{N}_0$:

$$E^a(f)(x) = \underbrace{(E \circ E \circ \dots \circ E)}_a(f)(x) = f(x + a)$$

Beobachtungen:

Seien P, Q Operatoren $\in \{E, I, \Delta, \nabla\}$, sei $\alpha \in \mathbb{C}$.

1

$$(P \pm Q)(f + g) = P(f) + P(g) \pm (Q(f) + Q(g))$$

2

$$(\alpha P)(f) = \alpha \cdot P(f)$$

3

$$(QP)(f) = Q(P(f)), \text{ i. a. } (QP)(f) \neq (PQ)(f)$$

4

$$\Delta^n = (E - I)^n = \underbrace{(E - I) \dots (E - I)}_n = \sum_{k=0}^n \left((-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \right)$$

Satz 200

Aus (4) folgt:

$$\begin{aligned}\Delta^n(f)(x) &= \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \right) (f)(x) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k) .\end{aligned}$$

Beweis:

Klar. □

Beispiel 201

$$\Delta^2(x^3) \Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^2 (-1)^{2-k} \binom{2}{k} k^3 = 0 - 2 + 8 = 6$$

4.8.3 Fallende Fakultät

Definition 202

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\frac{x^n}{x^{n+1}} = \frac{1}{x-n}$.

Damit für $n = -1$ „formal“:

$$x^{-1} = \frac{1}{x+1}$$

Und für n ersetzt durch $-n$:

$$x^{-n} = \frac{x^{-n+1}}{x+n}$$

$$x^{-n} := \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

$$x^{-\overline{n}} := \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$$

Lemma 203

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

①

$$\Delta x^n = n \cdot x^{n-1}$$

②

$$\nabla x^{\bar{n}} = n \cdot x^{\overline{n-1}}$$

Beweis:

(Wir zeigen nur 1.)

- $n > 0$:

$$\begin{aligned}\Delta x^n &= (x+1)^n - x^n \\ &= (x+1) \cdot x^{n-1} - (x-n+1) \cdot x^{n-1} \\ &= n \cdot x^{n-1}\end{aligned}$$

- $n = 0$:

$$\Delta x^0 = (x+1)^0 - x^0 = 0 = 0 \cdot x^{-1}$$

Beweis (Forts.):

- $n < 0$. Setze $m := -n$:

$$\begin{aligned}\Delta x^{-m} &= (x+1)^{-m} - x^{-m} \\ &= \frac{1}{(x+2)(x+3)\cdots(x+m+1)} - \frac{1}{(x+1)\cdots(x+m)} \\ &= \frac{(x+1) - (x+m+1)}{(x+1)\cdots(x+m+1)} \\ &= -m \cdot x^{-m-1}\end{aligned}$$

