Eigenschaften von $f : A \to B$:

- f injektiv: $(\forall b \in B)\Big[\big|f^{-1}(b)\big| \leq 1\Big]$
- f surjektiv: $(\forall b \in B)\Big[\big|f^{-1}(b)\big| \geq 1\Big]$
- f bijektiv: $(\forall b \in B)\Big[\big|f^{-1}(b)\big| = 1\Big]$, d.h. injektiv und surjektiv
- Ist $f : A \to B$ eine Bijektion, dann ist auch f^{-1} eine bijektive Funktion.

Eigenschaften von $f : A \to B$:

Existiert eine Bijektion von A nach B, haben A und B *gleiche Kardinalität*.
Warnung: Es gibt A, B mit $A \subsetneq B$, aber $|A| = |B|$!

Beispiel 15 ($|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}_0|$)

$$f : \mathbb{Z} \ni z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z - 1 & z < 0 \end{cases} \in \mathbb{N}_0$$

Sei R eine Relation über A, $\tilde{R}$ eine Relation über B.

- Eine Funktion $f : A \to B$ heißt Homomorphismus von R nach $\tilde{R}$, falls gilt:

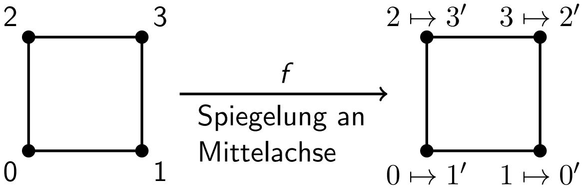
$$(a_1, \ldots, a_k) \in R \Rightarrow \Big(f(a_1), \ldots, f(a_k)\Big) \in \tilde{R}$$

- Eine Bijektion $f : A \to B$ heißt Isomorphismus zwischen R und $\tilde{R}$, falls gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R \iff \Big(f(a_1), \ldots, f(a_k)\Big) \in \tilde{R}$$

Beispiel 16

Relation: Die Kantenmenge $E = \{\{0,1\},\{0,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ des Graphen mit der Knotenmenge $\{0,1,2,3\}$
Funktion: Spiegelung der Knotenmenge wie gezeichnet an der Mittelachse



$E' = f(E) = \{\{0',1'\},\{1',3'\},\{0',2'\},\{2',3'\}\}$
f ist ein Isomorphismus bzgl. (der Relation) E.

Schreibweisen für wichtige Funktionen:

- $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$
  $\mathbb{R} \ni x \mapsto \lfloor x \rfloor := \max\{y \in \mathbb{Z}; y \leq x\} \in \mathbb{Z}$
  („untere Gaußklammer“, „*floor*“, „*entier*“)
- $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$
  $\mathbb{R} \ni x \mapsto \lceil x \rceil := \min\{y \in \mathbb{Z}; y \geq x\} \in \mathbb{Z}$
  („obere Gaußklammer“, „*ceiling*“)

Beispiel 17

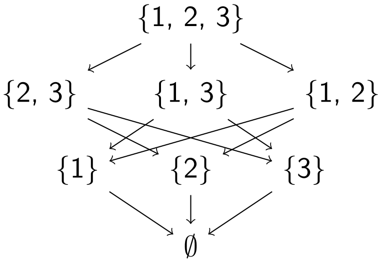
$$\lfloor \pi \rfloor = 3, \lfloor -\pi \rfloor = -4, \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

4.4 Partielle Ordnungen

Sei $(S, \preceq)$ eine partielle Ordnung.

Beispiel 18

$S = P(A), \ \preceq \equiv \subseteq, \ A = \{1, 2, 3\}$
Hassediagramm:



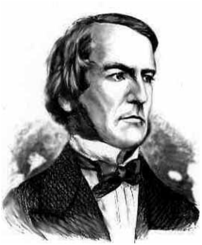
Eigenschaften partieller Ordnungen:

- $a, b \in S$ heißen vergleichbar (bzgl. $\preceq$), falls $a \preceq b$ oder $b \preceq a$, sonst unvergleichbar.
- Ein Element $a \in S$ heißt minimal, falls $(\nexists b \in S)[b \neq a \wedge b \preceq a]$.
- Ein Element $a \in S$ heißt maximal, falls $(\nexists b \in S)[b \neq a \wedge a \preceq b]$.
- Eine partielle Ordnung heißt linear oder vollständig, falls sie keine unvergleichbaren Elemente enthält $\big($z. B. $(\mathbb{N}_0, \leq)\big)$.

4.5 Boolesche Ausdrücke und Funktionen, Logiken

Oft ordnen wir Aussagen über irgendwelche Gegebenheiten die Werte *true* oder *false* zu. Daneben verwenden wir auch Verknüpfungen solcher Aussagen mittels Operatoren wie z.B. „und“, „oder“, oder der Negation.

Der Boolesche Aussagenkalkül stellt für dieses Vorgehen einen formalen Rahmen dar.



George Boole

lived from 1815 to 1864

Boole approached logic in a new way reducing it to a simple algebra, incorporating logic into mathematics. He also worked on differential equations, the calculus of finite differences and general methods in probability.

more on George Boole

Logik

- Logik ist die Wissenschaft des (begrifflichen) Schließens.
  Sie untersucht, welche Inferenzen korrekt sind.
- Unter Inferenz verstehen wir (informell) eine Aussage der Form:

  wenn A gilt/wahr ist, dann auch B.

- Alternative Sprechweisen:
  - „Wenn A, dann B“
  - „Aus A folgt B“, „B ist eine Folge von A“
  - „A impliziert B“, „$A \Rightarrow B$“
  - „Wenn B nicht gilt, dann kann auch A nicht gelten“
- Dabei heißt A jeweils die Annahme (Prämisse, Antezedens, Hypothese) und B die Konklusion (Folgerung, Conclusio, Konsequenz).

Bemerkung:

- Unter einer Implikation versteht man gewöhnlich einen Ausdruck/eine Behauptung der Form

$$\text{aus } A \text{ folgt } B \qquad \text{bzw.} \qquad A \Rightarrow B\,.$$

- Unter einer Inferenz versteht man den Vorgang, (im Rahmen einer Logik) für A und B (wie oben) von der Aussage/Behauptung A zu der Aussage/Behauptung B zu kommen.

Achtung!

Wenn (irgendwie) eine Implikation

$$\text{aus } A \text{ folgt } B$$

gilt/wahr ist, so heißt das von sich aus noch nicht, dass

- A gilt/wahr ist, oder
- B gilt/wahr ist.

Es sagt nur, dass, wenn A gilt, dann auch B.

Aussagenlogik (Propositional Logic)

- Aussagen werden aus einer vorgegebenen Menge von atomaren Aussagen (Platzhaltern für Aussagen) mit Hilfe der Operatoren (Konnektoren, Junktoren) „und“, „oder“, „nicht“ und „wenn, ... dann“(u.a.) gebildet.
- Atomare (aussagenlogische) Aussagen sind entweder wahr oder falsch.
- Die Grundlagen der Aussagenlogik wurden von George Boole („The Laws of Thought“, 1854) entwickelt (s.o.). Man spricht deshalb auch von der Booleschen Logik.

Formalismen der Aussagenlogik

- Die Aussagenlogik (wie jede Logik) bildet eine formale Sprache.
- Eine formale Sprache wird durch ihre Syntax und ihre Semantik definiert.
- Die Syntax der Sprache legt durch Regeln fest, welche Zeichenketten wohlgeformte Ausdrücke sind.
  Die wohlgeformten Ausdrücke einer Logik heißen Formeln.
- Die Semantik legt die Bedeutung der Ausdrücke fest.
  Eine formale Semantik ordnet jedem (wohlgeformten) Ausdruck ein mathematisches Objekt zu, welches die Bedeutung des Ausdrucks darstellt.

Syntax

- Eine formale Syntax besteht aus einem Vokabular und einer Menge von Formationsregeln/Bildungsgesetzen.
- Das Vokabular legt fest, welche Zeichen in Ausdrücken vorkommen dürfen
- Die Bildungsgesetze legen fest, welche Zeichenketten über dem Vokabular zulässig oder wohlgeformt sind (und welche nicht).

Syntax für die Aussagenlogik (ohne Quantoren)

1. true und false sind Formeln (alternativ: 1/0, wahr/falsch, . . .);
2. eine Aussagenvariable (wie x oder p) ist eine Formel;
3. sind F und G Formeln, dann ist auch
   - $\neg F$ (alternative Darstellung: $\overline{F}$)
   - $(F \wedge G)$
   - $(F \vee G)$
   - $(F \Rightarrow G)$
   - (F)

   eine Formel;
4. Ein Ausdruck ist nur dann eine Formel, wenn er durch endlichmalige Anwendung der obenstehenden Regeln konstruiert werden kann.

Beispiele für aussagenlogische Formeln

- Beispiele für aussagenlogische Formeln sind:
  1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$
  2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
  3. $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$
  4. $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$
- Keine Formeln sind dagegen:
  1. $\vee(p \Rightarrow q)$
  2. $p \wedge q \vee r$

Semantik der Aussagenlogik

- Eine Belegung („eine Welt“) ist eine Funktion von einer Menge von Aussagenvariablen in die Menge $\{0, 1\}$ der Wahrheitswerte.
- Die Belegung $p \mapsto 0$, $q \mapsto 1$ ist eine Belegung für die Formel $p \Rightarrow q$.
- Unter der Belegung $p \mapsto 1$, $q \mapsto 0$ ist der Wert der Formel $p \Rightarrow q$ gleich 0 (oder **false**).
- Unter der Belegung $p \mapsto 0$, $q \mapsto 1$ ist der Wert der Formel $p \Rightarrow q$ gleich 1 (oder **true**).
- Die Semantik einer booleschen Formel ist ihr Wert unter allen möglichen Belegungen (der darin vorkommenden Variablen).

Wahrheitstabellen

Damit ergibt sich

- Die Formel $\neg p$ ergibt genau dann **wahr** wenn p mit 0/**false** belegt wird.
- Die Formel $p \Rightarrow q$ ist genau dann **false**, wenn p gleich 1/**true** und q gleich 0/**false** ist.
- Wir sagen, dass eine Belegung eine Formel erfüllt, falls unter der Belegung der resultierende Wahrheitswert der Formel gleich 1/**true** ist.

Allgemeingültige Aussagen

Definition 19

- Eine (aussagenlogische) Formel p heißt allgemeingültig (oder auch eine Tautologie), falls p unter jeder Belegung **wahr** ist.
- Eine (aussagenlogische) Formel p heißt erfüllbar, falls es (mindestens) eine Belegung gibt, unter der p **wahr** ist.

Damit folgt:

- Die Formel $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$ ist allgemeingültig (eine Tautologie).
- Die Formel **false** $\Rightarrow p$ ist allgemeingültig.
- Die Formel $(p \vee \neg q) \wedge \neg p$ ist erfüllbar.
- Die Formel $p \wedge q \wedge (p \Rightarrow \neg q)$ ist nicht erfüllbar.

Definition 20

- Unter dem Erfüllbarkeitsproblem (SAT) verstehen wir die Aufgabe, festzustellen, ob eine gegebene (aussagenlogische) Formel erfüllbar ist.
- Unter dem Tautologieproblem (TAUT) verstehen wir die Aufgabe, festzustellen, ob eine gegebene (aussagenlogische) Formel eine Tautologie ist.

Boolesche Funktionen

Sei $\mathbb{B}$ die Menge $\{0,1\}$ der booleschen Werte.
Jede n-stellige boolesche Funktion bildet jede Kombinationen der Werte der n Eingangsgrößen jeweils auf einen Funktionswert aus $\{0,1\}$ ab.

$$f \ : \mathbb{B}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}$$

Beobachtung: Da $|\mathbb{B}| = 2$, gibt es genau 2^n verschiedene Tupel in $\mathbb{B}^n$.
Da wir für jedes dieser Tupel den Funktionswert beliebig $\in \mathbb{B}$ wählen können, gibt es genau 2^{2^n} verschiedene (totale) Boolesche Funktionen mit n Argumenten.

Boolesche Funktionen mit einem Argument

Nach der obigen Formel gibt es $2^{2^1} = 4$ boolesche Funktionen mit einem Argument:

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

f_1: „falsch“-Funktion
f_2: „wahr“-Funktion
f_3: Identität
f_4: Negation

Wir betrachten nun die Menge aller zweistelligen booleschen Funktionen.

(Unäre und) binäre Verknüpfungen boolescher Werte:

			$\vee$	$\Leftarrow$		$\Rightarrow$		$\equiv$ $=$	$\wedge$	nand	$\not\equiv$ $\neq$					nor	
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	f	f	f	f	f	f	f	f
t	f	t	t	t	t	f	f	f	f	t	t	t	t	f	f	f	f
f	t	t	t	f	f	t	t	f	f	t	t	f	f	t	t	f	f
f	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f

Normalformen boolescher Funktionen

Jeder boolesche Ausdruck kann durch (äquivalente) Umformungen in gewisse Normalformen gebracht werden!

Disjunktive Normalform (DNF) und Vollkonjunktion:
Eine Vollkonjunktion ist ein boolescher Ausdruck,

- in dem **alle** Variablen **einmal** vorkommen (jeweils als negiertes oder nicht negiertes Literal),
- alle Literale durch Konjunktionen $\wedge$ („und“) verbunden sind.

Die disjunktive („oder“, $\vee$) Verbindung von Vollkonjunktionen nennt man disjunktive Normalform (DNF). Statt $\neg a$ schreiben wir hier (auch, der Kürze halber) $\overline{a}$.

$$f(a,b,c) = \underbrace{\underbrace{(a \wedge b \wedge \overline{c})}_{\text{Vollkonjunktion}} \vee \underbrace{(\overline{a} \wedge b \wedge \overline{c})}_{\text{Vollkonjunktion}} \vee \ldots \vee \underbrace{(\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge c)}_{\text{Vollkonjunktion}}}_{\text{disjunktive Verknüpfung der Vollkonjunktionen}}$$

Ableitung der disjunktiven Normalform aus einer Wertetabelle

- jede Zeile der Wertetabelle entspricht einer Vollkonjunktion
- Terme mit Funktionswert „0“ tragen nicht zum Funktionsergebnis bei („oder“ von 0)

a	b	f(a,b)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- bilde Vollkonjunktionen für Zeilen mit Funktionswert „1“
  $\rightarrow$ Zeilen 2 und 3 („0“ in Tabelle $\equiv$ Negation der Variablen)
- keine solche Zeile: $f(a, b) = 0$
- Zeile 2: $\overline{a} \wedge b$
- Zeile 3: $a \wedge \overline{b}$
- disjunktive Verknüpfung der Vollkonjunktionen:
  $f(a, b) = (\overline{a} \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b})$

Konjunktive Normalform (KNF/CNF) und Volldisjunktion

Eine Volldisjunktion ist ein boolescher Ausdruck,

- in dem **alle** Variablen **einmal** vorkommen (in Form eines negierten oder nicht negierten Literals),
- alle Literale durch Disjunktionen $\vee$ („oder“) verbunden sind.

Die konjunktive („und“) Verbindung von Volldisjunktionen nennt man konjunktive Normalform, kurz KNF (engl.: CNF).

$$f(a,b,c) = \underbrace{\underbrace{(a \vee b \vee \overline{c})}_{\textit{Volldisjunktion}} \wedge \underbrace{(\overline{a} \vee b \vee \overline{c})}_{\textit{Volldisjunktion}} \wedge \ldots \wedge \underbrace{(\overline{a} \vee \overline{b} \vee c)}_{\textit{Volldisjunktion}}}_{\textit{konjunktive Verknüpfung der Volldisjunktionen}}$$

Ableitung der konjunktiven Normalform

- jede Zeile der Wertetabelle entspricht einer Volldisjunktion
- Terme mit Funktionswert „1“ tragen nicht zum Funktionsergebnis bei („und“ mit 1)

a	b	$f(a,b)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- bilde Volldisjunktionen für Zeilen mit Funktionswert „0“ $\rightarrow$ Zeilen 1 und 3 („1“ in Tabelle $\equiv$ Negation der Variablen)
- keine solche Zeile: $f(a,b) = 1$
- Zeile 1: $a \vee b$
- Zeile 3: $\overline{a} \vee b$
- konjunktive Verknüpfung der Volldisjunktionen: $f(a,b) = (a \vee b) \wedge (\overline{a} \vee b)$

Vergleich von DNF und KNF:

	DNF	**KNF**
wähle Zeilen mit Funktionswert	1	0
Bildung der Teil-Terme	Negation der „0“ Einträge Verknüpfung der Literale mit „und“	Negation der „1“ Einträge Verknüpfung der Literale mit „oder“
Verknüpfung der Teil-Terme	mit „oder“	mit „und“