2.3.1 Eigenschaften der Exponentialverteilung

Satz 104 (Skalierung exponentialverteilter Variablen)

Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit dem Parameter λ. Für $a > 0$ ist die Zufallsvariable $Y := aX$ wieder exponentialverteilt mit dem Parameter λ/a.

Beweis:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \Pr[Y \leq x] = \Pr[aX \leq x] \\ &= \Pr\left[X \leq \frac{x}{a}\right] = F_X\left(\frac{x}{a}\right) \\ &= 1 - e^{-\frac{\lambda x}{a}}\,. \end{aligned}$$

□

Satz 105 (Gedächtnislosigkeit)

Eine (positive) kontinuierliche Zufallsvariable X mit Wertebereich $\mathbb{R}^+$ ist genau dann exponentialverteilt, wenn für alle $x, y > 0$ gilt, dass

$$\Pr[X > x + y \mid X > y] = \Pr[X > x]\,. \qquad (*)$$

Beweis:

Sei X exponentialverteilt mit Parameter λ. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Pr[X > x + y \mid X > y] &= \frac{\Pr[X > x + y, X > y]}{\Pr[X > y]}\\ &= \frac{\Pr[X > x + y]}{\Pr[X > y]}\\ &= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = \Pr[X > x]\,.\end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

Sei umgekehrt X eine kontinuierliche Zufallsvariable, die die Gleichung $(*)$ erfüllt. Wir definieren $g(x) := \Pr[X > x]$. Für $x, y > 0$ gilt

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \Pr[X > x+y] \\ &= \Pr[X > x+y \mid X > y] \cdot \Pr[X > y] \\ &= \Pr[X > x] \cdot \Pr[X > y] = g(x)g(y)\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt durch wiederholte Anwendung

$$g(1) = g\Bigl(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n\text{-mal}}\Bigr) = \left(g\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr)\right)^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und somit insbesondere auch $g(1/n) = (g(1))^{1/n}$.

Beweis (Forts.):

Da X nur positive Werte annimmt, muss es ein $n \in \mathbb{N}$ geben mit $g(1/n) > 0$. Wegen $0 < g(1) \leq 1$ muss es daher auch ein $\lambda \geq 0$ geben mit $g(1) = e^{-\lambda}$.

Nun gilt für beliebige $p, q \in \mathbb{N}$

$$g(p/q) = g(1/q)^p = g(1)^{p/q},$$

und somit $g(r) = e^{-\lambda r}$ für alle $r \in \mathbb{Q}^+$.

Aufgrund der Stetigkeit folgt daraus

$$g(x) = e^{-\lambda x}\,.$$

$\square$

Beispiel 106

Über das Cäsium-Isotop $^{134}_{55}\text{Cs}$ ist bekannt, dass es eine mittlere Lebensdauer von ungefähr 3,03 Jahren oder $1{,}55 \cdot 10^6$ Minuten besitzt. Die Zufallsvariable X messe die Lebenszeit eines bestimmten $^{134}_{55}\text{Cs}$-Atoms. X ist exponentialverteilt mit dem Parameter

$$\lambda = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} = \frac{1}{1{,}55 \cdot 10^6} \approx 0{,}645 \cdot 10^{-6} \ \left[\frac{1}{\text{min}}\right]$$

Da λ den Kehrwert einer Zeit als Einheit besitzt, spricht man von der Zerfallsrate. Auch bei anderen Anwendungen ist es üblich, λ als Rate einzuführen.

2.3.2 Exponentialverteilung als Grenzwert der geometrischen Verteilung

Erinnerung: Die Poisson-Verteilung lässt sich als Grenzwert der Binomialverteilung darstellen.

Wir betrachten eine Folge geometrisch verteilter Zufallsvariablen X_n mit Parameter $p_n = \lambda/n$. Für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X_n \le k \cdot n$, gleich

$$\begin{aligned}\Pr[X_n \le kn] &= \sum_{i=1}^{kn} (1-p_n)^{i-1} \cdot p_n \;=\; p_n \cdot \sum_{i=0}^{kn-1} (1-p_n)^i \\ &= p_n \cdot \frac{1-(1-p_n)^{kn}}{p_n} \;=\; 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{kn}.\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^n = e^{-\lambda}$ gilt daher für die Zufallsvariablen $Y_n := \frac{1}{n}X_n$, dass

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\Pr[Y_n \le t] &= \lim_{n\to\infty}\Pr[X_n \le t\cdot n]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{tn}\right]\\ &= 1-e^{-\lambda t}\,.\end{aligned}$$

Die Folge Y_n der (skalierten) geometrisch verteilten Zufallsvariablen geht also für $n\to\infty$ in eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ über.

3. Mehrere kontinuierliche Zufallsvariablen

3.1 Mehrdimensionale Dichten

Definition 107

Zu zwei kontinuierlichen Zufallsvariablen X, Y wird der zugrunde liegende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsraum über $\mathbb{R}^2$ durch eine integrierbare (gemeinsame) Dichtefunktion $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y = 1$$

beschrieben. Für ein Ereignis $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (das aus abzählbar vielen geschlossenen oder offenen Bereichen gebildet sein muss) gilt

$$\Pr[A] = \int_A f_{X,Y}(x, y) \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y.$$

Unter einem Bereich B verstehen wir dabei Mengen der Art

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, c \le y \le d\} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Dabei können die einzelnen Intervallgrenzen auch „offen“ bzw. $\pm\infty$ sein.

Analog zum eindimensionalen Fall ordnen wir der Dichte $f_{X,Y}$ eine (gemeinsame) Verteilung $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ zu:

$$F_{X,Y}(x,y) = \Pr[X \leq x, Y \leq y] = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,v) \, \mathrm{d}\, u \, \mathrm{d}\, v.$$

3.2 Randverteilungen und Unabhängigkeit

Definition 108

Sei $f_{X,Y}$ die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X und Y. Die Randverteilung der Variablen X ist gegeben durch

$$F_X(x) = \Pr[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v) \,\mathrm{d}\, v \right] \mathrm{d}\, u.$$

Analog nennen wir

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,v) \,\mathrm{d}\, v$$

die Randdichte von X. Entsprechende Definitionen gelten symmetrisch für Y.

Definition 109

Zwei kontinuierliche Zufallsvariablen X und Y heißen unabhängig, wenn

$$\Pr[X \leq x, Y \leq y] = \Pr[X \leq x] \cdot \Pr[Y \leq y]$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

Dies ist gleichbedeutend mit

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)\,.$$

Differentiation ergibt

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)\,.$$

Für mehrere Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt analog: $X_1, \ldots, X_n$ sind genau dann unabhängig, wenn

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

bzw.

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

3.3 Warteprobleme mit der Exponentialverteilung

Warten auf mehrere Ereignisse

Satz 110

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ *seien unabhängig und exponentialverteilt mit den Parametern* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*. Dann ist auch* $X := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ *exponentialverteilt mit dem Parameter* $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

Beweis:

Der allgemeine Fall folgt mittels Induktion aus dem für $n = 2$. Für die Verteilungsfunktion F_X gilt:

$$\begin{aligned} 1 - F_X(t) &= \Pr[X > t] = \Pr[\min\{X_1, X_2\} > t] \\ &= \Pr[X_1 > t, X_2 > t] \\ &= \Pr[X_1 > t] \cdot \Pr[X_2 > t] \\ &= e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}. \end{aligned}$$

□

Anschaulich besagt Satz 110, dass sich die Raten addieren, wenn man auf das erste Eintreten eines Ereignisses aus mehreren unabhängigen Ereignissen wartet. Wenn beispielsweise ein Atom die Zerfallsrate λ besitzt, so erhalten wir bei n Atomen die Zerfallsrate $n\lambda$ (wie uns auch die Intuition sagt).