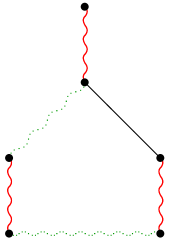
Kapitel VI Matchings in Graphen

1. Grundlagen

Definition 127

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, schlichter Graph. Ein Matching M in G ist eine Teilmenge von E, so dass keine zwei Kanten aus M einen Endpunkt gemeinsam haben.



Matching:

Variante 1

Variante 2

Definition 128

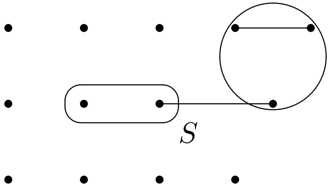
1. Ein Matching M in $G = (V, E)$ heißt perfekt (oder vollkommen), falls
$$|M| = \frac{|V|}{2}$$
2. Ein Matching M heißt „Matching maximaler Kardinalität“ (engl. maximum matching) in G, falls es in G kein Matching M' mit $|M'| > |M|$ gibt (durchgehend geringelt/rot im Beispiel)
3. Ein Matching M heißt maximal in G, falls es bezüglich „$\subseteq$“ maximal ist (engl. maximal matching) (gepunktet geringelt/grün im Beispiel)

Definition 129

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Wenn V in zwei nichtleere Teilmengen V_1 und V_2 partitioniert werden kann ($V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), so dass $E \subseteq V_1 \times V_2$ ist, dann heißt G bipartit ($G = (V_1, V_2, E)$).

Satz 130

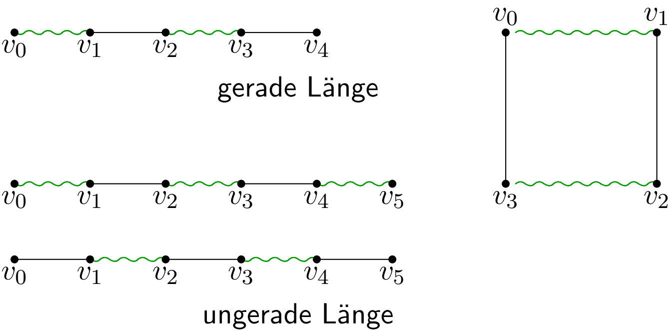
Ein Graph $G = (V, E)$ hat ein perfektes Matching genau dann, wenn $|V|$ gerade ist und es kein $S \subseteq V$ gibt, so dass der durch $V \setminus S$ induzierte Teilgraph mehr als $|S|$ Zusammenhangskomponenten ungerader Größe enthält.



Bemerkung: Die Richtung „$\Rightarrow$" ist klar, da in einem perfekten Matching in jeder „ungeraden" ZHK mindestens ein Knoten mit einem Knoten in S gematcht sein muss.

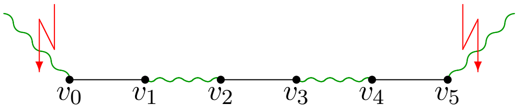
Definition 131

1. Ein einfacher Pfad (Kreis) $v_0, v_1, \ldots, v_r$ heißt alternierend bzgl. eines Matchings M, falls die Kanten $\{v_i, v_{i+1}\}$, $0 \leq i < r$, abwechselnd in M und nicht in M liegen.



Definition 131

2. Ein alternierender Pfad bzgl. eines Matchings M heißt augmentierend, falls er bzgl. „$\subseteq$" maximal ist und an beiden Enden ungematchte Knoten hat.



ungerade Länge

Bemerkung: Es kann keine augmentierenden Kreise geben.

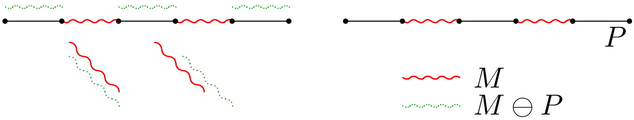
Definition 132

Seien S, T zwei Mengen, dann bezeichne $S \ominus T$ die symmetrische Differenz von S und T, d.h. $S \ominus T = (S - T) \cup (T - S)$.

Lemma 133 (Augmentierung eines Matchings)

Sei M ein Matching, P ein augmentierender Pfad bzgl. M. Dann ist auch $M \ominus P$ ein Matching, und es gilt $|M \ominus P| = |M| + 1$.

Beweis:



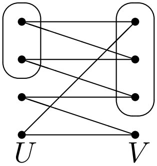
$\square$

Satz 134 (Heiratssatz [Frobenius, Hall, Rado, König])

Sei $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph. G enthält ein Matching der Kardinalität $|U|$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall A \subseteq U : |N(A)| \geq |A|,$$

wobei $N(A)$ die Nachbarschaft von A (in V) bezeichnet.



Beweis:

Die Richtung („$\Rightarrow$“) ist klar.

„$\Leftarrow$“: M sei ein maximum Matching in G. Annahme: $|M| < |U|$. Sei $A' \subseteq U$ die Teilmenge der durch M nicht gematchten Knoten in U. Seien weiter A (bzw. B) die von A' aus mittels alternierender Pfade erreichbaren Knoten in U (bzw. V). Enthält B einen ungematchten Knoten, dann ist ein dazugehöriger alternierender Pfad P augmentierend und $|M \ominus P| > |M|$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Andernfalls ist $|A| > |B|$ (da A zu jedem Knoten in B seinen gematchten Partner enthält), aber auch, im Widerspruch zur Voraussetzung, $N(A) \subseteq B$, also $|N(A)| < |A|$. $\square$

Alternativer Beweis:

Die Richtung („$\Rightarrow$“) ist (noch immer) klar.

„$\Leftarrow$“: Sei M ein Matching in G, mit $|M| < |U|$, und sei $u_0 \in U$ ein in M ungematchter Knoten. Da $|N(\{u_0\})| \geq 1$, hat u_0 einen Nachbarn $v_1 \in V$. Falls v_1 ungematcht ist, sind wir fertig, da wir einen augmentierenden Pfad gefunden haben. Andernfalls sei $u_1 \in U$ der mit v_1 gematchte Knoten. Dann ist $u_1 \neq u_0$ und $|N(\{u_0, u_1\})| \geq 2$, und es gibt einen Knoten $v_2 \in V$, der zu u_0 oder u_1 adjazent ist.

Falls v_2 in M nicht gematcht ist, beenden wir die Konstruktion, andernfalls fahren wir in obiger Weise fort und erreichen, wegen $|V| < \infty$, schließlich einen ungematchten Knoten $v_r \in V$. Damit haben wir aber wiederum einen augmentierenden Pfad $P = (v_r, u_{i_1}, v_{i_1}, \ldots, u_{i_k}, v_{i_k}, u_0)$ (mit $i_1 > \cdots > i_k$) gefunden! $\square$

Definition 135

Sei $G = (V, E)$ ein (ungerichteter) Graph. Eine Teilmenge $D \subseteq V$ heißt Träger von G (engl. vertex cover), falls D mit jeder Kante in E mindestens einen Knoten gemeinsam hat (also „jede Kante bedeckt").

Beobachtung: Sei D ein Träger von G und M ein Matching in G. Dann gilt offensichtlich

$$|D| \geq |M|,$$

da der Träger D jede Kante im Matching M treffen muss und die Kanten in M alle paarweise disjunkt sind.

Korollar 136

Seien D und M wie oben. Dann gilt

$$\min_D\{|D|\} \geq \max_M\{|M|\}.$$

Satz 137

Sei $G = (U, V, E)$ *ein (ungerichteter) bipartiter Graph. Dann gilt*

$$\min\{|D|;\ D \textit{ Träger von } G\} = \max\{|M|;\ M \textit{ Matching in } G\}$$

Beweis:

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass alle Knoten in G Grad ≥ 1 haben. Sei M ein maximum Matching in G, sei $A \subseteq U$ die von M gematchte Teilmenge von U, $B \subseteq V$ die von V.

Sei nun B' die Menge der Knoten in B, die von $U \setminus A$ aus mittels eines alternierenden Pfades erreichbar sind. Dann ist $B' \subseteq B$, da wir andernfalls einen augmentierenden Pfad gefunden haben. Sei A' die Menge der Knoten in A, die durch M mit Knoten in B' gematcht sind. Dann gibt es keine Kante zwischen A' und $V \setminus B$, da jede solche Kante wiederum zu einem augmentierenden Pfad führen würde.

Es gilt (i) $N(U \setminus A) \subseteq B'$, (ii) $N(A') = B'$, (iii) $N(V \setminus B) \subseteq A \setminus A'$. Damit ist $B' \cup (A \setminus A')$ ein Träger von G. Da $|A| = |M|$ und $|A'| = |B'|$, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 138 (Berge (1957))

Ein Matching hat maximale Kardinalität genau dann, wenn es keinen augmentierenden Pfad dafür gibt.

Beweis:

s.u. $\square$

Lemma 139

Seien M, N Matchings in G, und sei $|N| > |M|$. Dann enthält $N \ominus M$ mindestens $|N| - |M|$ knotendisjunkte augmentierende Pfade bzgl. M.

Beweis:

Der Grad eines Knotens in $(V, N \ominus M)$ ist ≤ 2. Die Zusammenhangskomponenten von $(V, N \ominus M)$ sind also

1. isolierte Knoten
2. einfache Kreise (gerader Länge)
3. alternierende Pfade

Seien $C_1, \ldots, C_r$ die Zusammenhangskomponenten in $(V, N \ominus M)$, dann gilt:

$$M \ominus \underbrace{C_1 \ominus C_2 \ominus \cdots \ominus C_r}_{N \ominus M} = N$$

Nur die C_i's, die augmentierende Pfade bzgl. M sind, vergrößern die Kardinalität des Matchings, und zwar jeweils um genau 1. Also muss es mindestens $|N| - |M|$ C_i's geben, die augmentierende Pfade bzgl. M sind (und knotendisjunkt, da ZHKs).

Korollar 140

Satz von Berge

2. Kürzeste augmentierende Pfade

Lemma 141

Sei M ein Matching der Kardinalität r, und sei s die maximale Kardinalität eines Matchings in $G = (V, E)$, $s > r$. Dann gibt es einen augmentierenden Pfad bzgl. M der Länge $\leq 2 \left\lfloor \frac{r}{s-r} \right\rfloor + 1$.

Beweis:

Sei N ein Matching maximaler Kardinalität in G, $|N| = s$. $N \ominus M$ enthält $\geq s - r$ augmentierende Pfade bzgl. M, die alle knotendisjunkt und damit auch kantendisjunkt sind. Mindestens einer dieser augmentierenden Pfade enthält daher $\leq \left\lfloor \frac{r}{s-r} \right\rfloor$ Kanten aus M. $\square$

Lemma 142

Sei P ein kürzester augmentierender Pfad bzgl. M, und sei P' ein augmentierender Pfad bzgl. des neuen Matchings $M \ominus P$. Dann gilt:

$$|P'| \geq |P| + 2|P \cap P'|$$

Beweis:

$N = M \ominus P \ominus P'$, also $|N| = |M| + 2$. Also enthält $M \ominus N$ mindestens 2 knotendisjunkte augmentierende Pfade bzgl. M, etwa P_1 und P_2. Es gilt:

$$\begin{aligned} |N \ominus M| &= |P \ominus P'| \\ &= |(P - P') \cup (P' - P)| \\ &= |P| + |P'| - 2|P \cap P'| \\ &\geq |P_1| + |P_2| \geq 2|P|, \end{aligned}$$

also

$$|P| + |P'| - 2|P \cap P'| \geq 2|P|,$$

also

$$|P'| \geq \underbrace{2|P| - |P|}_{|P|} + 2|P \cap P'|$$

$\square$

Schema für Matching-Algorithmus:

1. Beginne mit Matching $M_0 := \emptyset$.
2. Berechne Folge $M_0,\ P_0,\ M_1,\ P_1, \ldots,\ M_i,\ P_i, \ldots$, wobei jeweils P_i ein kürzester augmentierender Pfad bzgl. M_i ist und

$$M_{i+1} := M_i \ominus P_i\,.$$

Im obigen Schema gilt

$$|P_{i+1}| \geq |P_i| \text{ für alle } i\,.$$

Lemma 143

Seien P_i und P_j in obiger Folge zwei augmentierende Pfade gleicher Länge. Dann sind P_i und P_j knotendisjunkt.

Beweis:

Annahme: es gibt eine Folge $(P_k)_{k\geq 0}$ mit $|P_i| = |P_j|$, $j > i$, $P_i \cap P_j \neq 0$, $j - i$ minimal gewählt. Durch die Wahl von j sind die Pfade $P_{i+1}, \ldots, P_j$ knotendisjunkt. Also ist P_j auch ein augmentierender Pfad bzgl. $M' := M_{i+1}$, dem Matching nach den Augmentierungen mit $P_0,\ P_1, \ldots, P_i$. Aus dem vorhergehenden Lemma folgt $|P_j| \geq |P_i| + 2|P_i \cap P_j|$, also P_i, P_j kantendisjunkt, da $|P_i| = |P_j|$. Da in M' jeder Knoten in P_i gematcht ist (und dies dann auch in $M' \ominus P_{i+1} \ominus P_{i+2} \ominus \cdots \ominus P_{j-1}$ gilt), können auch P_i und P_j keinen Knoten gemeinsam haben. $\square$

Satz 144

Sei s die maximale Kardinalität eines Matchings in $G = (V, E)$. Dann enthält die Folge $|P_0|, |P_1|, \ldots$ höchstens $\lfloor 2\sqrt{s} + 1 \rfloor$ verschiedene Werte.

Beweis:

Sei $r := \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor$ $(= s - \lceil \sqrt{s} \rceil)$. Per Konstruktion ist $|M_i| = i$, also $|M_r| = r$. Mit Lemma 141 folgt

$$|P_r| \leq 2 \left\lfloor \frac{\lfloor s - \sqrt{s} \rfloor}{s - \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor} \right\rfloor + 1 \leq 2 \left\lfloor \frac{s}{\sqrt{s}} \right\rfloor + 1 = 2 \left\lfloor \sqrt{s} \right\rfloor + 1.$$

Für $i \leq r$ ist also $|P_i|$ eine der ungeraden Zahlen in $[1, 2\sqrt{s} + 1]$, also eine von $\lfloor \sqrt{s} \rfloor + 1$ ungeraden Zahlen. $P_{r+1}, \ldots, P_{s-1}$ tragen höchstens $s - r - 1 < \sqrt{s}$ zusätzliche Längen bei. $\square$

Verfeinertes Schema:

$M := \emptyset$
while $\exists$ augmentierender Pfad bzgl. M **do**
    $l :=$ Länge eines kürzesten augmentierenden Pfades bzgl. M
    bestimme eine bzgl. „$\subseteq$" maximale Menge $\{Q_1, \ldots, Q_k\}$ augmentierender Pfade bzgl. M, die alle Länge l haben und knotendisjunkt sind
    $M := M \ominus Q_1 \ominus \cdots \ominus Q_k$
od

Korollar 145

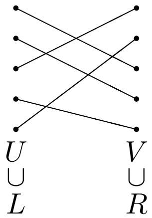
Die obige $while$*-Schleife wird höchstens* $\mathcal{O}\left(|V|^{\frac{1}{2}}\right)$ *mal durchlaufen.*

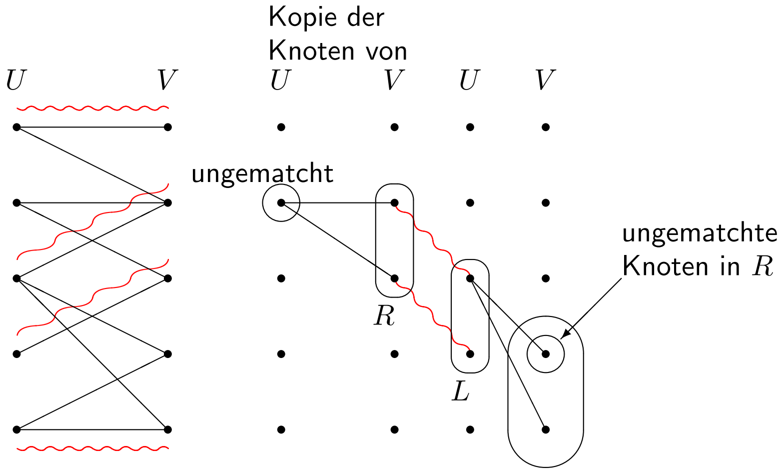
3. Maximum Matchings in bipartiten Graphen

Sei $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph, M ein Matching in G.

Zur Bestimmung der Länge eines kürzesten augmentierten Pfades bzgl. M führen wir eine simultane alternierende BFS durch, die von allen in M ungematchten Knoten in U aus startet.

for alle $v \in U \cup V$ **do** $label[v] := 0$ **od**
$R := \emptyset$; $l := 1$
for alle ungematchten Knoten $v \in U$ **do**
    for alle $\{v, w\} \in E$ **do** $label[w] := 1$; $R := R \cup \{w\}$ **od**
od
while $R \neq \emptyset$ **and** R enthält keinen ungematchten Knoten **do**
    $L := \emptyset$; $l{+}{+}$
    for $w \in R, \{v, w\} \in M$ **do** $L := L \cup \{v\}$; $label[v] := l$ **od**
    $R := \emptyset$; $l{+}{+}$
    for alle $v \in L, \{v, w\} \in E \setminus M$ **do**
        if $label[w] = 0$ **then**
            $R := R \cup \{w\}$; $label[w] := l$
        fi
    od
od
$R :=$ Menge der ungematchten Knoten in R




Kopie der
Knoten von
U
V
U
V
U
V
ungematcht
ungematchte
Knoten in R
R
L

Nachdem wir die Länge l eines kürzesten augmentierenden Pfades bzgl. M ermittelt haben, führen wir nacheinander von jedem ungematchten Knoten in U aus eine (zwischen ungematchten und gematchten Kanten) alternierende DFS bis zur Tiefe l aus, wobei wir

1. wenn wir einen ungematchten Knoten (in Tiefe l) erreichen, einen kürzesten augmentierenden Pfad Q_i gefunden haben; für den weiteren Verlauf der DFSs markieren wir Q_i als gelöscht;
2. jede Kante, über die die DFS zurücksetzt, ebenfalls als gelöscht markieren.

Der Zeitaufwand für diese DFSs beträgt $\mathcal{O}(n + m)$, da wir jede Kante höchstens zweimal (einmal in der DFS vorwärts, einmal rückwärts) besuchen.

Lemma 146

Gegeben die Länge eines kürzesten augmentierenden Pfades, kann eine bzgl. „$\subseteq$" maximale Menge kürzester augmentierender Pfade in Zeit $\mathcal{O}(n+m)$ gefunden werden.

Satz 147

In bipartiten Graphen kann ein Matching maximaler Kardinalität in Zeit

$$\mathcal{O}\left(n^{\frac{1}{2}}(n+m)\right)$$

gefunden werden.

Beweis:

Gemäß Korollar 145 genügen $\mathcal{O}(n^{\frac{1}{2}})$ Phasen, in denen jeweils mittels einer simultanen BFS und einer sequentiellen DFS (beide in Zeit $\mathcal{O}(n+m)$) eine maximale Menge kürzester augmentierender Pfade bestimmt wird. □

John Hopcroft, Richard Karp:
An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs
SIAM J. Comput. **2**(4), pp. 225–231 (1973)

4. Maximum Matchings in allgemeinen Graphen

In einem allgemeinen (nicht unbedingt bipartiten) Graphen können wir in Zeit $\mathcal{O}(n+m)$ jeweils einen kürzesten augmentierenden Pfad finden und erhalten damit

Satz 148

In einem Graph $G = (V, E)$ kann ein Matching maximaler Kardinalität in Zeit

$$\mathcal{O}(n \cdot m)$$

gefunden werden.

Für Maximum-Matching-Algorithmen in allgemeinen Graphen mit Laufzeit $\mathcal{O}(n^{\frac{1}{2}}(n+m))$ verweisen wir auf die Literatur:

Silvio Micali, Vijay V. Vazirani:

An $O(\sqrt{|V|} \cdot |E|)$ algorithm for finding maximum matching in general graphs

Proceedings of the 21st Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS'80 (Syracuse, NY, October 13–15, 1980), pp. 17–27 (1980)

Vijay V. Vazirani:

A theory of alternating paths and blossoms for proving correctness of the $O(\sqrt{V}E)$ general graph maximum matching algorithm

Combinatorica **14**(1), pp. 71–109 (1994)

Norbert Blum:

A new approach to maximum matching in general graphs

Proceedings of the 17th International Colloquium on Automata, Languages and Programming, ICALP'90 (Warwick University, England, July 16–20, 1990), LNCS **443**, pp. 586–597 (1990)

5. Matchings in gewichteten bipartiten Graphen

5.1 Zerlegung doppelt stochastischer Matrizen

Sei M eine $n \times n$-Matrix mit reellen Einträgen $m_{ij} \geq 0$, so dass alle Zeilen- und alle Spaltensummen $= r > 0$ sind. Wir assoziieren mit M den bipartiten Graphen $G = G_M = (U, V, E)$, wobei $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ die n Zeilen und $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ die n Spalten von M repräsentiert. G enthält die Kante $\{u_i, v_j\}$ gdw $m_{ij} > 0$.

Ein Matching in G entspricht einer Menge von Einträgen $m_{ij} > 0$, die alle in verschiedenen Zeilen und Spalten vorkommen. Wir nennen eine solche Menge von Positionen eine Diagonale der Matrix M.

Ein Träger von M ist eine Menge von Zeilen und Spalten, die zusammen alle Matrixeinträge > 0 enthalten.

Beispiel 149

$$\begin{matrix} \mathbf{2} & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & \mathbf{2} \\ 3 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 \end{matrix}$$

Die markierten Elemente bilden eine Diagonale der Größe $n = 5$.

Annahme: M hat keine Diagonale der Größe n. Dann gibt es nach Satz 137 z Zeilen und s Spalten von M mit $z + s < n$, die alle Einträge > 0 von M bedecken. Damit wäre aber

$$r \cdot n = \sum m_{ij} \leq r \cdot (z + s) < r \cdot n$$

Widerspruch.

Also existiert eine Diagonale der Größe n und ein entsprechendes perfektes Matching M_1 von G. Die Adjazenzmatrix P_1 von $G_1 = (V, M_1)$ enthält in jeder Zeile und Spalte genau eine 1, ist also eine so genannte Permutationsmatrix (alle anderen Einträge sind 0). Sei nun

$$m_1 := \min\{m_{ij};\ \{u_i, v_j\} \in M_1\}.$$

Die Matrix $M - m_1 M_1$ hat wiederum konstante Zeilen- und Spaltensummen (nämlich $r - m_1$) und strikt mehr Einträge $= 0$ als M.

Durch Iteration ergibt sich damit

Satz 150 (Birkhoff, von Neumann)

Sei M eine doppelt-stochastische Matrix (d.h. alle Zeilen- und Spaltensummen sind $= 1$, alle Einträge sind reell und ≥ 0), dann gibt es eine Darstellung

$$M = \sum_{i=1}^{k} m_i P_i \,,$$

wobei die P_i Permutationsmatrizen und die $m_i \in \mathbb{R}$, mit $m_i > 0$ und $\sum_{i=1}^{k} m_i = 1$.

Bemerkung: Jede doppelt-stochastische Matrix ist also eine Konvexkombination von endlich vielen Permutationsmatrizen.

5.2 Matchings in knotengewichteten bipartiten Graphen

Sei $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph mit einer Gewichtsfunktion $w : U \to \mathbb{R}^+$. Wir suchen ein Matching M in G, so dass die Summe der Gewichte der gematchten Knoten in U maximiert wird. Eine Teilmenge $T \subseteq U$, die durch ein Matching in G gematcht werden kann, heißt auch Transversale.

Sei $\mathcal{T}$ die Menge der Transversalen von G (beachte: $\emptyset \in \mathcal{T}$).

Satz 151

Die Menge $\mathcal{T}$ der Transversalen von G bildet ein Matroid.

Beweis:

Es ist klar, dass $\emptyset \in \mathcal{T}$ und dass $\mathcal{T}$ unter Teilmengenbildung abgeschlossen ist. Seien T und T' Transversalen $\in \mathcal{T}$ mit $|T'| = |T| + 1$, und seien M bzw. M' zugehörige Matchings. Dann gibt es bzgl. M einen augmentierenden Pfad P. Ein Endknoten von P liegt in U. Augmentieren wir M mittels P, erhalten wir also eine Transversale der Kardinalität $|T| + 1$. $\square$

Das greedy-Paradigma lässt sich also anwenden, um in Zeit $\mathcal{O}(n \cdot m)$ eine Transversale maximalen Gewichts zu konstruieren.

5.3 Matchings in kantengewichteten bipartiten Graphen

Sei nun $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph mit einer Gewichtsfunktion w von den Kanten in die nichtnegativen reellen Zahlen. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $|U| = |V|$ $(= n)$ und dass $G = K_{n,n}$, indem wir geeignet Knoten sowie Kanten mit Gewicht 0 hinzunehmen.

Damit können wir auch o.B.d.A. voraussetzen, dass jedes Matching maximalen oder minimalen Gewichts in G perfekt ist.

Indem wir $w(u_i, v_j)$ durch $w_{max} - w(u_i, v_j)$ ersetzen (wobei w_{max} das größte auftretende Gewicht ist), reduziert sich das Problem, ein Matching maximalen/minimalen Gewichts zu finden, auf das, eines minimalen/maximalen Gewichts zu finden.

Wir betrachten daher o.B.d.A. das Problem, in G ein perfektes Matching minimalen Gewichts zu finden.

Wir suchen also eine Diagonale der Größe n mit minimalem Gewicht. Sei W die Gewichtsmatrix. Verändern wir das Gewicht eines jeden Elements einer Zeile/Spalte von W um einen festen Betrag δ, so ändert sich das Gewicht einer jeden Diagonale ebenfalls um δ (da diese ja genau ein Element aus jeder Zeile bzw. aus jeder Spalte enthält), und eine Diagonale minimalen Gewichts bleibt minimal.

Durch Subtraktion geeigneter Konstanten von den Zeilen bzw. Spalten der Matrix W können wir daher eine äquivalente Gewichtsmatrix W' erhalten, die in jeder Zeile und Spalte mindestens eine 0 enthält, während alle Werte noch immer ≥ 0 sind.

Beispiel 152

$$\begin{pmatrix} 9 & 11 & 12 & 11 \\ 6 & 3 & 8 & 5 \\ 7 & 6 & 13 & 11 \\ 9 & 10 & 10 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & \mathbf{0} & 4 & 5 \\ 2 & 3 & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$$

Enthält die Matrix W' eine 0-Diagonale der Größe n (also eine Diagonale, deren Elemente alle $= 0$ sind), so geben die Positionen dieser Diagonale auch die Kanten eines perfekten Matchings minimalen Gewichts im Graphen G mit der ursprünglichen Gewichtsfunktion w an, und wir sind fertig.

Andernfalls ist die maximale Länge einer 0-Diagonale in W' kleiner als n. Wir nennen eine Menge von Zeilen und Spalten einer Matrix W' eine 0-Überdeckung von W', falls diese Zeilen und Spalten alle Einträge $= 0$ der Matrix beinhalten.

Im vorhergehenden Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bilden z.B. die Zeilen 1 und 4 zusammen mit der Spalte 2 eine 0-Überdeckung der Größe 3.

Aus Satz 137 wissen wir, dass die maximale Größe einer 0-Diagonale gleich der minimalen Größe einer 0-Überdeckung ist.

Falls W' also eine 0-Überdeckung der Größe $< n$ hat, ändern wir die Gewichtsmatrix W' zu einer Gewichtsmatrix W'' so, dass die Einträge ≥ 0 und minimale perfekte Matchings solche bleiben.

Es existiere also eine 0-Überdeckung von W', die z Zeilen und s Spalten enthalte, mit $z + s < n$. Sei w_{min} das Minimum der nicht überdeckten Einträge von W'. Also ist $w_{min} > 0$.

Um aus W' die Matrix W'' zu erhalten, verfahren wir wie folgt:

1. subtrahiere w_{min} von jedem Element der $n - z$ nicht überdeckten Zeilen (dadurch können vorübergehend negative Einträge entstehen);
2. addiere w_{min} zu allen Elementen der s überdeckten Spalten.

Damit ergibt sich für die Einträge w''_{ij} von W''

$$w''_{ij} = \begin{cases} w'_{ij} - w_{min} & \text{falls } w'_{ij} \text{ nicht überdeckt ist} \\ w'_{ij} & \text{falls } w'_{ij} \text{ entweder von einer Zeile oder von} \\ & \text{einer Spalte überdeckt ist} \\ w'_{ij} + w_{min} & \text{falls } w'_{ij} \text{ von einer Zeile und von einer} \\ & \text{Spalte überdeckt ist} \end{cases}$$

Es sind also insbesondere alle w''_{ij} wieder ≥ 0.

Für unsere Beispielsmatrix ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & \mathbf{0} & 2 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad =: W''$$

Die Anzahl der in W' sowohl durch eine Zeile als auch durch eine Spalte überdeckten Einträge ist $s \cdot z$, die der überhaupt nicht überdeckten Einträge $n^2 - n(s+z) + sz$.

Damit ergibt sich für die Gesamtgewichtsveränderung

$$\begin{aligned}
\sum_{ij}(w''_{ij} - w'_{ij}) &= ((sz) - (n^2 - n(s+z) + sz)) \cdot w_{min} \\
&= (n(s+z) - n^2) \cdot w_{min} \\
&< 0
\end{aligned}$$

Da die Kantengewichte als ganzzahlig ≥ 0 vorausgesetzt sind, kann die Transformation $W' \Rightarrow W''$ nur endlich oft wiederholt werden, und der Algorithmus terminiert.

Man kann zeigen:

Satz 153

In einem kantengewichteten bipartiten Graphen mit ganzzahligen Kantengewichten ≥ 0 kann ein gewichtsmaximales (bzw. ein gewichtsminimales perfektes) Matching in Zeit

$$\mathcal{O}(n^3)$$

bestimmt werden.