SS 2005

Einführung in die Informatik IV

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2005SS/info4/index.html.de

9. Mai 2005

4.4 Das Pumping-Lemma und Ogdens Lemma für kontextfreie Sprachen

Zur Erinnerung: Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen: Für jede reguläre Sprache L gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lässt in $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^*w \subseteq L$.

Zum Beweis haben wir $n = |Q|$ gewählt, wobei Q die Zustandsmenge eines L erkennenden DFA war. Das Argument war dann, dass beim Erkennen von z (mindestens) ein Zustand zweimal besucht werden muss und damit der dazwischen liegende Weg im Automaten beliebig oft wiederholt werden kann.

Völlig gleichwertig kann man argumentieren, dass bei der Ableitung von z mittels einer rechtslinearen Grammatik ein Nichtterminalsymbol (mindestens) zweimal auftreten muss und die dazwischen liegende Teilableitung beliebig oft wiederholt werden kann.

4.4 Das Pumping-Lemma und Ogdens Lemma für kontextfreie Sprachen

Zur Erinnerung: Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen: Für jede reguläre Sprache L gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lässt in $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^*w \subseteq L$.

Zum Beweis haben wir $n = |Q|$ gewählt, wobei Q die Zustandsmenge eines L erkennenden DFA war. Das Argument war dann, dass beim Erkennen von z (mindestens) ein Zustand zweimal besucht werden muss und damit der dazwischen liegende Weg im Automaten beliebig oft wiederholt werden kann.

Völlig gleichwertig kann man argumentieren, dass bei der Ableitung von z mittels einer rechtslinearen Grammatik ein Nichtterminalsymbol (mindestens) zweimal auftreten muss und die dazwischen liegende Teilableitung beliebig oft wiederholt werden kann.

4.4 Das Pumping-Lemma und Ogdens Lemma für kontextfreie Sprachen

Zur Erinnerung: Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen: Für jede reguläre Sprache L gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lässt in $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^*w \subseteq L$.

Zum Beweis haben wir $n = |Q|$ gewählt, wobei Q die Zustandsmenge eines L erkennenden DFA war. Das Argument war dann, dass beim Erkennen von z (mindestens) ein Zustand zweimal besucht werden muss und damit der dazwischen liegende Weg im Automaten beliebig oft wiederholt werden kann.

Völlig gleichwertig kann man argumentieren, dass bei der Ableitung von z mittels einer rechtslinearen Grammatik ein Nichtterminalsymbol (mindestens) zweimal auftreten muss und die dazwischen liegende Teilableitung beliebig oft wiederholt werden kann.

Genau dieses Argument kann in ähnlicher Form auch auf kontextfreie Grammatiken (in Chomsky-Normalform) angewendet werden:

Satz 63 (Pumping-Lemma)

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lässt in

$$z = uvwxy,$$

mit

1. $|vx| \geq 1$,
2. $|vwx| \leq n$, *und*
3. $\forall i \in \mathbb{N}_0:\ uv^iwx^iy \in L$.

Genau dieses Argument kann in ähnlicher Form auch auf kontextfreie Grammatiken (in Chomsky-Normalform) angewendet werden:

Satz 63 (Pumping-Lemma)

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lässt in

$$z = uvwxy,$$

mit

1. $|vx| \geq 1$,
2. $|vwx| \leq n$, *und*
3. $\forall i \in \mathbb{N}_0 : \ uv^iwx^iy \in L$.

Genau dieses Argument kann in ähnlicher Form auch auf kontextfreie Grammatiken (in Chomsky-Normalform) angewendet werden:

Satz 63 (Pumping-Lemma)

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lässt in

$$z = uvwxy,$$

mit

1. $|vx| \geq 1$,
2. $|vwx| \leq n$, *und*
3. $\forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^iwx^iy \in L.$

Genau dieses Argument kann in ähnlicher Form auch auf kontextfreie Grammatiken (in Chomsky-Normalform) angewendet werden:

Satz 63 (Pumping-Lemma)

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lässt in

$$z = uvwxy,$$

mit

1. $|vx| \geq 1$,
2. $|vwx| \leq n$, *und*
3. $\forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^iwx^iy \in L.$

Genau dieses Argument kann in ähnlicher Form auch auf kontextfreie Grammatiken (in Chomsky-Normalform) angewendet werden:

Satz 63 (Pumping-Lemma)

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lässt in

$$z = uvwxy,$$

mit

1. $|vx| \geq 1$,
2. $|vwx| \leq n$, *und*
3. $\forall i \in \mathbb{N}_0 : \ uv^iwx^iy \in L$.

Beweis:

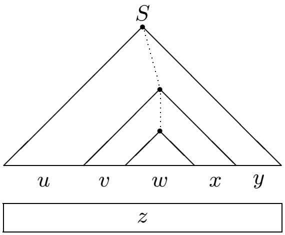
Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L$. Wähle $n = 2^{|V|}$. Sei $z \in L(G)$ mit $|z| \geq n$. Dann hat der Ableitungsbaum für z (ohne die letzte Stufe für die Terminale) mindestens die Tiefe $|V| + 1$, da er wegen der Chomsky-Normalform den Verzweigungsgrad 2 hat.

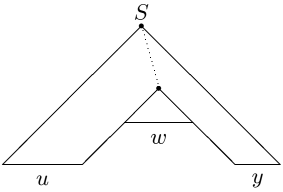
Beweis:

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L$. Wähle $n = 2^{|V|}$. Sei $z \in L(G)$ mit $|z| \geq n$. Dann hat der Ableitungsbaum für z (ohne die letzte Stufe für die Terminale) mindestens die Tiefe $|V| + 1$, da er wegen der Chomsky-Normalform den Verzweigungsgrad 2 hat.

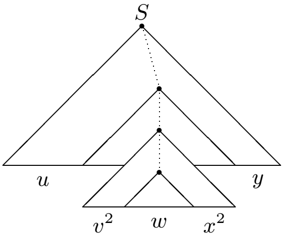
Auf einem Pfadabschnitt der Länge $\geq |V| + 1$ kommt nun mindestens ein Nichtterminal wiederholt vor. Die zwischen diesen beiden Vorkommen liegende Teilableitung kann nun beliebig oft wiederholt werden.

Beweis:





Dieser Ableitungsbaum zeigt
$uwy \in L$



Dieser Ableitungsbaum zeigt
$uv^2wx^2y \in L$

Beweis:

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L$. Wähle $n = 2^{|V|}$. Sei $z \in L(G)$ mit $|z| \geq n$. Dann hat der Ableitungsbaum für z (ohne die letzte Stufe für die Terminale) mindestens die Tiefe $|V| + 1$, da er wegen der Chomsky-Normalform den Verzweigungsgrad 2 hat.

Auf einem Pfadabschnitt der Länge $\geq |V| + 1$ kommt nun mindestens ein Nichtterminal wiederholt vor. Die zwischen diesen beiden Vorkommen liegende Teilableitung kann nun beliebig oft wiederholt werden.

Um $|vwx| \leq n$ zu erreichen, muss man das am weitesten unten liegende Doppelvorkommen eines solchen Nichtterminals wählen.

$\square$

Beispiel 64

Wir wollen sehen, dass die Sprache

$$\{a^i b^i c^i;\ i \in \mathbb{N}_0\}$$

nicht kontextfrei ist. Wäre sie kontextfrei, so könnten wir das Wort $a^n b^n c^n$ (n die Konstante aus dem Pumping-Lemma) aufpumpen, ohne aus der Sprache herauszufallen. Wir sehen aber leicht, dass das Teilwort v nur aus a's bestehen kann und bei jeder möglichen Verteilung des Teilworts x Pumpen entweder die Anzahl der a's, b's und c's unterschiedlich ändert oder, wenn

$$(\#_a(vx) =)\ \#_b(vx) = \#_c(vx) > 0\ ,$$

dass b's und c's in der falschen Reihenfolge auftreten.

Beispiel 64

Wir wollen sehen, dass die Sprache

$$\{a^i b^i c^i;\ i \in \mathbb{N}_0\}$$

nicht kontextfrei ist. Wäre sie kontextfrei, so könnten wir das Wort $a^n b^n c^n$ (n die Konstante aus dem Pumping-Lemma) aufpumpen, ohne aus der Sprache herauszufallen. Wir sehen aber leicht, dass das Teilwort v nur aus a's bestehen kann und bei jeder möglichen Verteilung des Teilworts x Pumpen entweder die Anzahl der a's, b's und c's unterschiedlich ändert oder, wenn

$$(\#_a(vx) =)\ \#_b(vx) = \#_c(vx) > 0\ ,$$

dass b's und c's in der falschen Reihenfolge auftreten.

Zur Vereinfachung von Beweisen wie in dem gerade gesehenen Beispiel führen wir die folgende Verschärfung des Pumping-Lemmas ein:

Satz 65 (Ogdens Lemma)

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ die folgende Aussage gilt: Werden in z mindestens n (beliebige) Buchstaben markiert, so lässt sich z zerlegen in

$$z = uvwxy,$$

so dass

1. *in vx mindestens ein Buchstabe und*
2. *in vwx höchstens n Buchstaben markiert sind und*
3. $(\forall i \in \mathbb{N}_0)[uv^iwx^iy \in L]$.

Bemerkung: Das Pumping-Lemma ist eine triviale Folgerung aus Ogdens Lemma (markiere alle Buchstaben in z).

Zur Vereinfachung von Beweisen wie in dem gerade gesehenen Beispiel führen wir die folgende Verschärfung des Pumping-Lemmas ein:

Satz 65 (Ogdens Lemma)

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ die folgende Aussage gilt: Werden in z mindestens n (beliebige) Buchstaben markiert, so lässt sich z zerlegen in

$$z = uvwxy,$$

so dass

1. *in vx mindestens ein Buchstabe und*
2. *in vwx höchstens n Buchstaben markiert sind und*
3. $(\forall i \in \mathbb{N}_0)[uv^iwx^iy \in L]$.

Bemerkung: Das Pumping-Lemma ist eine triviale Folgerung aus Ogdens Lemma (markiere alle Buchstaben in z).

Zur Vereinfachung von Beweisen wie in dem gerade gesehenen Beispiel führen wir die folgende Verschärfung des Pumping-Lemmas ein:

Satz 65 (Ogdens Lemma)

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ die folgende Aussage gilt: Werden in z mindestens n (beliebige) Buchstaben markiert, so lässt sich z zerlegen in

$$z = uvwxy,$$

so dass

1. *in vx mindestens ein Buchstabe und*
2. *in vwx höchstens n Buchstaben markiert sind und*
3. $(\forall i \in \mathbb{N}_0)[uv^iwx^iy \in L]$.

Bemerkung: Das Pumping-Lemma ist eine triviale Folgerung aus Ogdens Lemma (markiere alle Buchstaben in z).

Zur Vereinfachung von Beweisen wie in dem gerade gesehenen Beispiel führen wir die folgende Verschärfung des Pumping-Lemmas ein:

Satz 65 (Ogdens Lemma)

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ die folgende Aussage gilt: Werden in z mindestens n (beliebige) Buchstaben markiert, so lässt sich z zerlegen in

$$z = uvwxy,$$

so dass

1. *in vx mindestens ein Buchstabe und*
2. *in vwx höchstens n Buchstaben markiert sind und*
3. $(\forall i \in \mathbb{N}_0)[uv^iwx^iy \in L]$.

Bemerkung: Das Pumping-Lemma ist eine triviale Folgerung aus Ogdens Lemma (markiere alle Buchstaben in z).

Zur Vereinfachung von Beweisen wie in dem gerade gesehenen Beispiel führen wir die folgende Verschärfung des Pumping-Lemmas ein:

Satz 65 (Ogdens Lemma)

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ die folgende Aussage gilt: Werden in z mindestens n (beliebige) Buchstaben markiert, so lässt sich z zerlegen in

$$z = uvwxy,$$

so dass

1. *in vx mindestens ein Buchstabe und*
2. *in vwx höchstens n Buchstaben markiert sind und*
3. $(\forall i \in \mathbb{N}_0)[uv^i wx^i y \in L]$.

Bemerkung: Das Pumping-Lemma ist eine triviale Folgerung aus Ogdens Lemma (markiere alle Buchstaben in z).

Zur Vereinfachung von Beweisen wie in dem gerade gesehenen Beispiel führen wir die folgende Verschärfung des Pumping-Lemmas ein:

Satz 65 (Ogdens Lemma)

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ die folgende Aussage gilt: Werden in z mindestens n (beliebige) Buchstaben markiert, so lässt sich z zerlegen in

$$z = uvwxy,$$

so dass

1. *in vx mindestens ein Buchstabe und*
2. *in vwx höchstens n Buchstaben markiert sind und*
3. $(\forall i \in \mathbb{N}_0)[uv^i wx^i y \in L]$.

Bemerkung: Das Pumping-Lemma ist eine triviale Folgerung aus Ogdens Lemma (markiere alle Buchstaben in z).

Beweis:

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L$. Wähle $n = 2^{|V|+1}$. Sei $z \in L$ und seien in z mindestens n Buchstaben markiert. In einem Ableitungsbaum für z markieren wir alle (inneren) Knoten, deren linker *und* rechter Teilbaum *jeweils* mindestens ein markiertes Blatt enthalten. Es ist nun offensichtlich, dass es einen Pfad von der Wurzel zu einem Blatt gibt, auf dem mindestens $|V| + 1$ markierte innere Knoten liegen.

Beweis:

...

Wir betrachten die letzten $|V| + 1$ markierten inneren Knoten eines Pfades mit maximaler Anzahl markierter Knoten; nach dem Schubfachprinzip sind zwei mit demselben Nichtterminal, z.B. A, markiert. Wir nennen diese Knoten v_1 und v_2. Seien die Blätter des Teilbaumes mit der Wurzel v_2 insgesamt mit w und die Blätter des Teilbaumes mit der Wurzel v_1 insgesamt mit vwx beschriftet. Es ist dann klar, dass die folgende Ableitung möglich ist:

$$S \to^* uAy \to^* uvAxy \to^* uvwxy\,.$$

Beweis:

...

Wir betrachten die letzten $|V| + 1$ markierten inneren Knoten eines Pfades mit maximaler Anzahl markierter Knoten; nach dem Schubfachprinzip sind zwei mit demselben Nichtterminal, z.B. A, markiert. Wir nennen diese Knoten v_1 und v_2. Seien die Blätter des Teilbaumes mit der Wurzel v_2 insgesamt mit w und die Blätter des Teilbaumes mit der Wurzel v_1 insgesamt mit vwx beschriftet. Es ist dann klar, dass die folgende Ableitung möglich ist:

$$S \to^* uAy \to^* uvAxy \to^* uvwxy\,.$$

Es ist auch klar, dass der Mittelteil dieser Ableitung weggelassen oder beliebig oft wiederholt werden kann.

Beweis:

...

Es bleibt noch zu sehen, dass vx mindestens einen und vwx höchstens n markierte Buchstaben enthält. Ersteres ist klar, da auch der Unterbaum von v_1, der v_2 nicht enthält, ein markiertes Blatt haben muss.

Beweis:

...

Es bleibt noch zu sehen, dass vx mindestens einen und vwx höchstens n markierte Buchstaben enthält. Ersteres ist klar, da auch der Unterbaum von v_1, der v_2 nicht enthält, ein markiertes Blatt haben muss.

Letzteres ist klar, da der gewählte Pfad eine maximale Anzahl von markierten inneren Knoten hatte und unterhalb von v_1 nur noch höchstens $|V|$ markierte Knoten auf diesem Pfad sein können. Der Teilbaum mit Wurzel v_1 kann also maximal $2^{|V|+1} = n$ markierte Blätter haben. Formal kann man z.B. zeigen, dass ein Unterbaum, der auf jedem Ast maximal k markierte (innere) Knoten enthält, höchstens 2^k markierte Blätter enthält. $\square$

Beispiel 66

$$L = \{a^i b^j c^k d^l;\ i = 0 \text{ oder } j = k = l\}\,.$$

Sei n die Konstante aus Ogdens Lemma. Betrachte das Wort $ab^n c^n d^n$ und markiere darin $bc^n d$. Nun gibt es eine Zerlegung $ab^n c^n d^n = uvwxy$, so dass vx mindestens ein markiertes Symbol enthält und $uv^2wx^2y \in L$.

Es ist jedoch leicht zu sehen, dass dies einen Widerspruch liefert, da vx höchstens zwei verschiedene der Symbole b, c, d enthalten kann, damit beim Pumpen nicht die Reihenfolge durcheinander kommt.

Beispiel 66

$$L = \{a^i b^j c^k d^l;\ i = 0 \text{ oder } j = k = l\}\,.$$

Sei n die Konstante aus Ogdens Lemma. Betrachte das Wort $ab^nc^nd^n$ und markiere darin bc^nd. Nun gibt es eine Zerlegung $ab^nc^nd^n = uvwxy$, so dass vx mindestens ein markiertes Symbol enthält und $uv^2wx^2y \in L$.

Es ist jedoch leicht zu sehen, dass dies einen Widerspruch liefert, da vx höchstens zwei verschiedene der Symbole b, c, d enthalten kann, damit beim Pumpen nicht die Reihenfolge durcheinander kommt.

Beispiel 66

$$L = \{a^i b^j c^k d^l;\ i = 0 \text{ oder } j = k = l\}\,.$$

Sei n die Konstante aus Ogdens Lemma. Betrachte das Wort $ab^nc^nd^n$ und markiere darin bc^nd. Nun gibt es eine Zerlegung $ab^nc^nd^n = uvwxy$, so dass vx mindestens ein markiertes Symbol enthält und $uv^2wx^2y \in L$.

Es ist jedoch leicht zu sehen, dass dies einen Widerspruch liefert, da vx höchstens zwei verschiedene der Symbole b, c, d enthalten kann, damit beim Pumpen nicht die Reihenfolge durcheinander kommt.

Satz 67

Sie $G = (V, \Sigma, P, S)$ kontextfrei. Dann kann die Menge V' der Variablen $A \in V$, für die gilt:

$$(\exists w \in \Sigma^*)[A \rightarrow^* w]$$

in Zeit $O(|V| \cdot s(G))$ berechnet werden.

Beweis:

Betrachte folgenden Algorithmus:

$\Delta := \{A \in V;\ (\exists (A \rightarrow w) \in P$ mit $w \in \Sigma^*\};\ V' := \emptyset;$
while $\Delta \neq \emptyset$ **do**
  $V' := V' \cup \Delta$
  $\Delta := \{A \in V \setminus V';\ (\exists A \rightarrow \alpha) \in P$ mit $\alpha \in (V' \cup \Sigma)^*\}$
od

Induktion über die Länge der Ableitung. □

Satz 67

Sie $G = (V, \Sigma, P, S)$ *kontextfrei. Dann kann die Menge* V' *der Variablen* $A \in V$*, für die gilt:*

$$(\exists w \in \Sigma^*)[A \rightarrow^* w]$$

in Zeit $O(|V| \cdot s(G))$ *berechnet werden.*

Beweis:

Betrachte folgenden Algorithmus:

$\Delta := \{A \in V;\ (\exists (A \rightarrow w) \in P$ mit $w \in \Sigma^*\}$; $V' := \emptyset$;
while $\Delta \neq \emptyset$ **do**
  $V' := V' \cup \Delta$
  $\Delta := \{A \in V \setminus V';\ (\exists A \rightarrow \alpha) \in P$ mit $\alpha \in (V' \cup \Sigma)^*\}$
od

Induktion über die Länge der Ableitung. $\square$

4.5 Algorithmen für kontextfreie Sprachen/Grammatiken

Satz 67

Sie $G = (V, \Sigma, P, S)$ kontextfrei. Dann kann die Menge V' der Variablen $A \in V$, für die gilt:

$$(\exists w \in \Sigma^*)[A \rightarrow^* w]$$

in Zeit $O(|V| \cdot s(G))$ berechnet werden.

Beweis:

Betrachte folgenden Algorithmus:

$\Delta := \{A \in V;\ (\exists (A \rightarrow w) \in P$ mit $w \in \Sigma^*\}$; $V' := \emptyset$;
while $\Delta \neq \emptyset$ **do**
  $V' := V' \cup \Delta$
  $\Delta := \{A \in V \setminus V';\ (\exists A \rightarrow \alpha) \in P$ mit $\alpha \in (V' \cup \Sigma)^*\}$
od

Induktion über die Länge der Ableitung. □

4.5 Algorithmen für kontextfreie Sprachen/Grammatiken

Satz 67

Sie $G = (V, \Sigma, P, S)$ kontextfrei. Dann kann die Menge V' der Variablen $A \in V$, für die gilt:

$$(\exists w \in \Sigma^*)[A \to^* w]$$

in Zeit $O(|V| \cdot s(G))$ berechnet werden.

Beweis:

Betrachte folgenden Algorithmus:

$\Delta := \{A \in V;\ (\exists (A \to w) \in P \text{ mit } w \in \Sigma^*\};\ V' := \emptyset;$

while $\Delta \neq \emptyset$ **do**

  $V' := V' \cup \Delta$

  $\Delta := \{A \in V \setminus V';\ (\exists A \to \alpha) \in P \text{ mit } \alpha \in (V' \cup \Sigma)^*\}$

od

Induktion über die Länge der Ableitung. □

4.5 Algorithmen für kontextfreie Sprachen/Grammatiken

Satz 67

Sie $G = (V, \Sigma, P, S)$ *kontextfrei. Dann kann die Menge* V' *der Variablen* $A \in V$*, für die gilt:*

$$(\exists w \in \Sigma^*)[A \rightarrow^* w]$$

in Zeit $O(|V| \cdot s(G))$ *berechnet werden.*

Beweis:

Betrachte folgenden Algorithmus:

$\Delta := \{A \in V;\ (\exists (A \rightarrow w) \in P$ mit $w \in \Sigma^*\}$; $V' := \emptyset$;
while $\Delta \neq \emptyset$ **do**
  $V' := V' \cup \Delta$
  $\Delta := \{A \in V \setminus V';\ (\exists A \rightarrow \alpha) \in P$ mit $\alpha \in (V' \cup \Sigma)^*\}$
od

Induktion über die Länge der Ableitung. $\square$

4.5 Algorithmen für kontextfreie Sprachen/Grammatiken

Satz 67

Sie $G = (V, \Sigma, P, S)$ kontextfrei. Dann kann die Menge V' der Variablen $A \in V$, für die gilt:

$$(\exists w \in \Sigma^*)[A \to^* w]$$

in Zeit $O(|V| \cdot s(G))$ berechnet werden.

Beweis:

Betrachte folgenden Algorithmus:

$\Delta := \{A \in V;\ (\exists(A \to w) \in P$ mit $w \in \Sigma^*\}$; $V' := \emptyset$;
while $\Delta \neq \emptyset$ **do**
  $V' := V' \cup \Delta$
  $\Delta := \{A \in V \setminus V';\ (\exists A \to \alpha) \in P$ mit $\alpha \in (V' \cup \Sigma)^*\}$
od

Induktion über die Länge der Ableitung. $\square$

Satz 67

Sie $G = (V, \Sigma, P, S)$ *kontextfrei. Dann kann die Menge* V' *der Variablen* $A \in V$*, für die gilt:*

$$(\exists w \in \Sigma^*)[A \to^* w]$$

in Zeit $O(|V| \cdot s(G))$ *berechnet werden.*

Beweis:

Betrachte folgenden Algorithmus:

$\Delta := \{A \in V;\ (\exists (A \to w) \in P$ mit $w \in \Sigma^*\}$; $V' := \emptyset$;
while $\Delta \neq \emptyset$ **do**
  $V' := V' \cup \Delta$
  $\Delta := \{A \in V \setminus V';\ (\exists A \to \alpha) \in P$ mit $\alpha \in (V' \cup \Sigma)^*\}$
od

Induktion über die Länge der Ableitung. □

4.5 Algorithmen für kontextfreie Sprachen/Grammatiken

Satz 67

Sie $G = (V, \Sigma, P, S)$ *kontextfrei. Dann kann die Menge* V' *der Variablen* $A \in V$, *für die gilt:*

$$(\exists w \in \Sigma^*)[A \rightarrow^* w]$$

in Zeit $O(|V| \cdot s(G))$ *berechnet werden.*

Beweis:

Betrachte folgenden Algorithmus:

$\Delta := \{A \in V;\ (\exists (A \rightarrow w) \in P \text{ mit } w \in \Sigma^*\};\ V' := \emptyset;$
while $\Delta \neq \emptyset$ **do**
  $V' := V' \cup \Delta$
  $\Delta := \{A \in V \setminus V';\ (\exists A \rightarrow \alpha) \in P \text{ mit } \alpha \in (V' \cup \Sigma)^*\}$
od

Induktion über die Länge der Ableitung. □