Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2003/04
Übungsblatt 1
24. Oktober 2003

Diskrete Strukturen I

Abgabe bis Freitag, 31. Oktober 2003, 10:30 Uhr (in Stellordner vor Raum 03.09.052)

Aufgabe 1

Seien M, N und P drei beliebige Mengen.

a) Zeigen Sie, dass für zwei Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to P$ gilt: Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv.

b) Für welche Mengen M ist jede Injektion $M \to M$ eine Surjektion?

c) Zeigen Sie, dass für $m = |M|$ und $n = |N|$ die Anzahl aller injektiven Abbildungen von M nach N durch

$$\prod_{i=1}^{m}(n - i + 1)$$

gegeben ist.
Anmerkung: Für den obigen Term schreibt man auch abkürzend $n^{\underline{m}}$.

Aufgabe 2

Was ist falsch an folgendem Beweis der Behauptung

“Sind n Geraden in der Ebene je paarweise nicht-parallel, so schneiden sie sich alle in einem gemeinsamen Punkt” ?

Beweis durch Induktion. Für $n = 1$ (und auch $n = 2$) ist die Behauptung offenbar korrekt. Aus der Annahme ihrer Korrektheit für $n = k$ folgern wir die Gültigkeit für $n = k + 1$: Wir nummerieren die Geraden mit $1, 2, \ldots, k + 1$ durch. Dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung, dass sich die Geraden $1, \ldots, k$ in einem gemeinsamen Punkt p schneiden. Ebenso gibt es einen gemeinsamen Schnittpunkt q für die Geraden $2, \ldots, k+1$. Es muss aber $p = q$ gelten, denn Geraden, die zwei verschiedene Punkte gemeinsam haben, sind gleich (also insbesondere parallel). Also schneiden sich alle $k + 1$ Geraden im selben Punkt.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass es nicht mehr rationale Zahlen gibt als natürliche Zahlen, dass also eine Injektion $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}_0$ existiert. Geben Sie eine solche Injektion explizit an.

Aufgabe 4

Zeigen Sie analog zur vorhergehenden Aufgabe, dass auch die Menge aller Polynome $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ in einer Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten a_i und $n \in \mathbb{N}_0$ nicht mächtiger ist als die Menge der natürlichen Zahlen.